Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Richard Williamson, (735) 90154

MA3002 Generell topologi

Lørdag 1. juni 2013
Tid: 09:00 – 13:00
Hjelpemidler: Kode D
Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Kalkulator: Hewlett Packard HP30S, Citizen SR-270X eller Citizen SR-270X College.

Besvar fire av fem oppgaver. Hvis du besvarer alle fem oppgavene, teller de fire beste besvarelsene.

Hver oppgave er verdt 25 poeng. Estimert antall for hvert delpunkt vises i klammer. Karakteren fastsettes på grunnlag av poeng og en generell kvalitativ bedømmelse av besvarelsene.

Oppgave 1

a) Hvilke av mengder under definerer en topologi på mengden $X = \{a, b, c, d\}$?

(i) $\big\{\emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}, X\big\}$
(ii) $\big\{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}, X\big\}$
(iii) $\big\{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, d\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, X\big\}$

Begrunn eventuelle tilfeller som ikke passer. [5]

b) La $\mathcal{O}$ være topologien

$$\big\{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{b, d\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, X\big\}$$

på X. Er mengden $\{c, d\}$ lukket i $(X, \mathcal{O})$? Begrunn svaret. [2]

c) Regn ut grensen av mengden $\{a, b, c\}$ i $(X, \mathcal{O})$. [5]

d) Er $(X, \mathcal{O})$ kompakt? [3]

e) La $X' = \{a', b', c', d'\}$, og la $\mathcal{O}'$ være topologien på X' med basis

$$\big\{\{a'\}, \{a', b'\}, \{a', c'\}, \{a', d'\}\big\}.$$

La

$$X \xrightarrow{f} X'$$

være avbildningen gitt ved $a \mapsto b'$, $b \mapsto a'$, $c \mapsto d'$, $d \mapsto c'$. Er f kontinuerlig? Begrunn svaret. [5]

f) La $Y = \big\{a, b, c, d, e\big\}$ og la $\mathcal{O}_Y$ være topologien

$$\big\{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{c, d, e\}, \{b, c, d, e\}, Y\big\}$$

på Y. Er $(Y, \mathcal{O}_Y)$ sammenhengende? Begrunn svaret. [5]

Oppgave 2

a) Tenk på bokstaven A som en delmengde av $\mathbb{R}^2$ utstyrt med underromstopologien $\mathcal{O}_{\mathsf{A}}$ med hensyn på $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{R}^2})$.

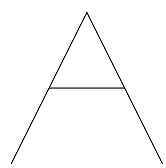
Med andre ord, la A være unionen av mengdene

$$\{(x-1, y) \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ og } y = x\},$$

$$\{(x, y+1) \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ og } y = -x\},$$

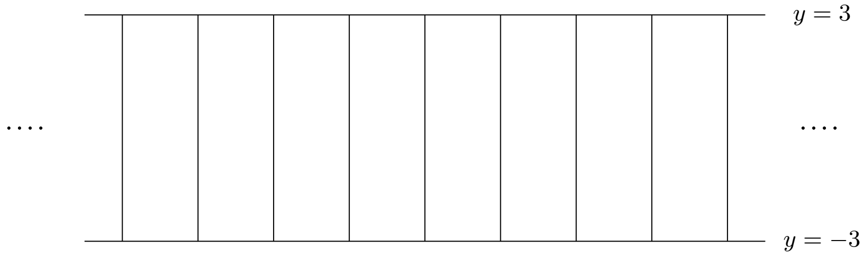
og

$$\left\{(x, y) \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ og } y = \frac{1}{2}\right\}.$$



Er $(\mathsf{A}, \mathcal{O}_{\mathsf{A}})$ kompakt? Begrunn svaret. [7]

b) La $X = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -3 \leq y \leq 3\big\}$ være utstyrt med underromstopologien $\mathcal{O}_X$ med hensyn på $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{R}^2})$.



Gi et eksempel på en åpen overdekning av X som ikke har en endelig deloverdekning. [5]

c) La X være en delmengde av $\mathbb{R}$, utstyrt med underromstopologien $\mathcal{O}_X$ med hensyn på $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\mathbb{R}})$.

Følgende utsagn er galt: $(X, \mathcal{O}_X)$ er sammenhengende hvis og bare hvis X er et åpent intervall (a, b) eller et lukket intervall $[a, b]$ for noen $a, b \in \mathbb{R}$.

Hva er den riktige beskrivelsen av sammenhengende delmengder av $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\mathbb{R}})$? [3]

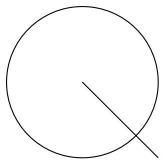
d) Tenk på bokstaven Q som en delmengde av $\mathbb{R}^2$, utstyrt med underromstopologien $\mathcal{O}_{\mathsf{Q}}$ med hensyn på $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{R}^2})$.

Med andre ord, la Q være unionen av mengdene

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\| = 1\}$$

og

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ og } y = -x\}.$$



Vis at $(\mathsf{A}, \mathcal{O}_{\mathsf{A}})$ ikke er homeomorf med $(\mathsf{Q}, \mathcal{O}_{\mathsf{Q}})$.

Nevn de resultatene fra pensum som behøves. Det er ikke nødvendig å gi et bevis. [10]

Oppgave 3

a) Vis at $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{R}^2})$ er Hausdorff.

Du kan ikke bruke resultater fra forelesningene uten å bevise dem. [5]

b) La $(X, \mathcal{O}_X)$ og $(Y, \mathcal{O}_Y)$ være topologiske rom. La $X \times Y$ være utstyrt med produkttopologien $\mathcal{O}_{X \times Y}$. Bevis at avbildningen

$$X \times Y \xrightarrow{p} X$$

gitt ved $(x, y) \mapsto x$ er kontinuerlig. [5]

c) La $(X, \mathcal{O}_X)$ være et topologisk rom. Anta at det finnes distinkte elementer $x, x' \in X$ slik at følgende holder.

(1) Det er en vei fra x til x' i X.

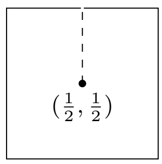
(2) For hver $x'' \in X$ er det enten en vei fra x til x'' i X eller en vei fra x' til x'' i X.

Vis at $(X, \mathcal{O}_X)$ er veisammenhengende.

Du kan benytte uten bevis resultater fra pensum. [5]

d) La

$$Y = I^2 \setminus \{(x,y) \in I^2 \mid x = \frac{1}{2} \text{ og } y > \frac{1}{2}\}.$$



La Y være utsyrt med underromstopologien $\mathcal{O}_Y$ med hensyn på $(I^2, \mathcal{O}_{I^2})$. Er $(Y, \mathcal{O}_Y)$ sammenhengende? Begrunn svaret.

Du kan benytte uten bevis resultater fra pensum. [5]

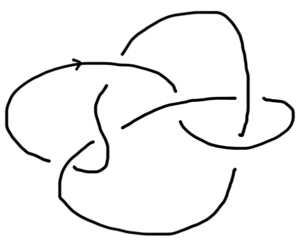
e) Er $(Y, \mathcal{O}_Y)$ lokalkompakt? Begrunn svaret.

Du kan benytte uten bevis resultater fra pensum. [5]

Oppgave 4

a) Definer en knute. [3]

b) Regn ut vridningen (the writhe) av den orienterte knuten gitt under. [5]



c) Har nødvendigvis to isotopiske knuter samme vridning (writhe)? Gi et bevis eller et moteeksempel. [5]

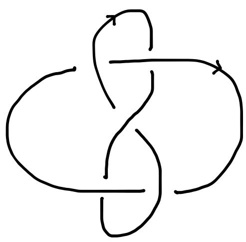
d) Skein-relasjonene som tilfredsstiller Jones-polynomet til en orientert lenke er som følger.

1) $V_{\bigcirc}(t) = 1$

unknot

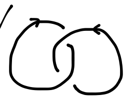
2) $t^{-1} V$  $(t) - t\, V$  $(t) = (t^{1/2} - t^{-1/2})\, V$  (t)

Bruk skein-relasjonene, eller bruk andre metoder, for å regne ut Jones-polynomet til den orienterte lenken gitt under.

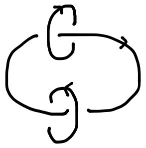


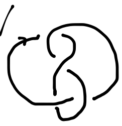
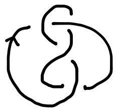
Du kan anta uten bevis følgende Jones-polynomene. [10]

$$V_{\bigcirc\,\bigcirc}(t) = -t^{-1/2} - t^{1/2}$$

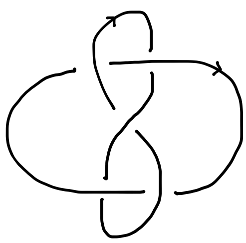
V  $(t) = -t^{5/2} - t^{1/2}$

V  $(t) = -t^{-5/2} - t^{-1/2}$

V  $(t) = t^{-2} + 2 + t^{2}$

V  $(t) = V$  $(t) = t^{-2} - t^{-1} + 1 - t + t^{2}$

e) Er den orienterte lenken

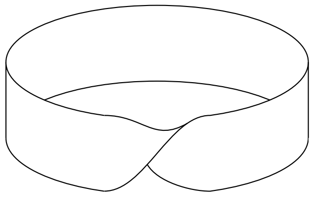


fra d) isotopisk med speilbildet sitt?

Du kan benytte uten bevis resultater fra pensum. [2]

Oppgave 5

a) Definer en ekvivalensrelasjon $\sim$ på I^2 slik at $(I^2/\sim, \mathcal{O}_{I^2/\sim})$ er Möbius-båndet. [3]



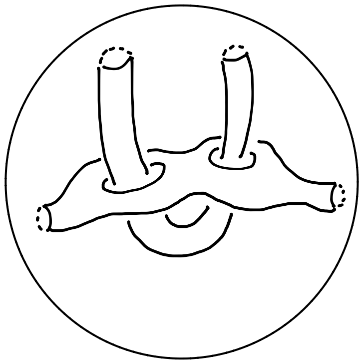
b) Vis at Möbius-båndet er kompakt og sammenhengende.

Du kan anta at $(I, \mathcal{O}_I)$ er kompakt og sammenhengende, men du må begrunne hvorfor eventuelle andre topologiske rom som dukker opp i argumentasjonen er kompakt eller sammenhengende.

Du kan benytte uten bevis resultater fra pensum, men du kan ikke anta at Möbius-båndet kan betraktes som en delmengde av $\mathbb{R}^n$ for noen $n \geq 0$, med mindre du kan bevise det. [6]

c) Er Möbius-båndet en flate? [4]

d) Utfør etterfølgende kirurgier på det topologiske rommet $(X, \mathcal{O}_X)$ gitt under — en 2-sfære med tuneller — til du oppnår et topologisk rom som er homeomorf til 2-sfæren $(S^2, \mathcal{O}_{S^2})$.



Tegn en illustrasjon for hver kirurgi og gi hver illustrasjon en kort bildetekst. [7]

e) Ved å benytte resultatet over, eller ved å bruke andre måter, bestem Euler karakteristikken av $(X, \mathcal{O}_X)$.

Du kan benytte uten bevis resultater fra pensum. [5]