Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

Fagleg kontakt under eksamen:
Richard Williamson, (735) 90154

MA3002 Generell topologi

Laurdag 1. juni 2013
Tid: 09:00 – 13:00
Hjelpemiddel: Kode D
Ingen trykte eller handskrevne hjelpemiddel tillatt.
Kalkulator: Hewlett Packard HP30S, Citizen SR-270X eller Citizen SR-270X College.

Svar på fire av fem oppgåver. Om du svarer på alle fem oppgåvene, teller dei fire beste oppgåvene.

Kvar oppgåve er verd 25 poeng. Estimert antal poeng for kvar deloppgåve vises i klammer. Karakteren fastsettas på grunnlag av poeng og ei generell kvalitativ vurdering av svara.

Oppgåve 1

a) Kva for nokre av mengdene gitt under definerer ein topologi på mengda $X = \{a, b, c, d\}$?

(i) $\big\{\emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}, X\big\}$

(ii) $\big\{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}, X\big\}$

(iii) $\big\{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, d\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, X\big\}$

Grunngjev eventuelle tilfelle som ikkje passer. [5]

b) La $\mathcal{O}$ vere topologien

$$\big\{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{b, d\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, X\big\}$$

på X. Er mengda $\{c, d\}$ lukka i $(X, \mathcal{O})$? Grunngjev svaret. [2]

c) Rekn ut grensa av mengda $\{a, b, c\}$ i $(X, \mathcal{O})$. [5]

d) Er $(X, \mathcal{O})$ kompakt? [3]

e) La $X' = \{a', b', c', d'\}$, og la $\mathcal{O}'$ vere topologien på X' med basis

$$\big\{\{a'\}, \{a', b'\}, \{a', c'\}, \{a', d'\}\big\}.$$

La

$$X \xrightarrow{f} X'$$

vere avbildinga gitt ved $a \mapsto b'$, $b \mapsto a'$, $c \mapsto d'$, $d \mapsto c'$. Er f kontinuerleg? Grunngjev svaret. [5]

f) La $Y = \big\{a, b, c, d, e\big\}$ og la $\mathcal{O}_Y$ vere topologien

$$\big\{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{c, d, e\}, \{b, c, d, e\}, Y\big\}$$

på Y. Er $(Y, \mathcal{O}_Y)$ samanhengande? Grunngjev svaret. [5]

Oppgåve 2

a) Tenk på bokstaven A som ei delmengde av $\mathbb{R}^2$ utstyrt med underromstopologien $\mathcal{O}_{\mathsf{A}}$ med omsyn på $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{R}^2})$.

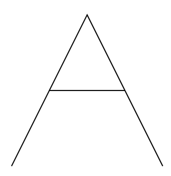
Med andre ord, la A vere unionen av mengdene

$$\big\{(x-1, y) \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ og } y = x\big\},$$

$$\big\{(x, y+1) \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ og } y = -x\big\},$$

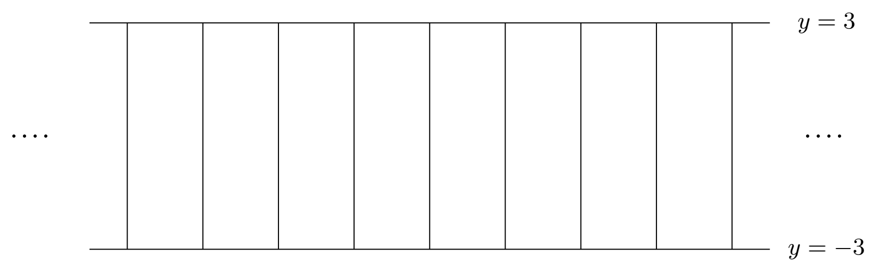
og

$$\big\{(x, y) \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ og } y = \frac{1}{2}\big\}.$$



Er $(\mathsf{A}, \mathcal{O}_{\mathsf{A}})$ kompakt? Grunngjev svaret. [7]

b) La $X = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -3 \leq y \leq 3\big\}$ vere utstyrt med underromstopologien $\mathcal{O}_X$ med omsyn på $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{R}^2})$.



Gi eit eksempel på ei open overdekking av X som ikkje har ei endeleg deloverdekking. [5]

c) La X vere ei delmengde av $\mathbb{R}$, utstyrt med underromstopologien $\mathcal{O}_X$ med omsyn på $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\mathbb{R}})$.

Følgende utsegn er galt: $(X, \mathcal{O}_X)$ er samanhengande viss og berre viss X er eit ope intervall (a, b) eller eit lukka intervall $[a, b]$ for nokre $a, b \in \mathbb{R}$.

Kva er den rette forklaringa av samanhengande delmengder av $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\mathbb{R}})$? [3]

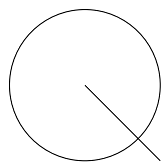
d) Tenk på bokstaven Q som ei delmengde av $\mathbb{R}^2$, utstyrt med underromstopologien $\mathcal{O}_{\mathsf{Q}}$ med omsyn på $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{R}^2})$.

Med andre ord, la Q vere unionen av mengdene

$$\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\| = 1\big\}$$

og

$$\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ og } y = -x\big\}.$$



Vis at $(\mathsf{A}, \mathcal{O}_{\mathsf{A}})$ ikkje er homeomorf med $(\mathsf{Q}, \mathcal{O}_{\mathsf{Q}})$.

Nemn dei resultata frå pensum som trengst. Det er ikkje naudsynt å gje eit bevis. [10]

Oppgåve 3

a) Vis at $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{R}^2})$ er Hausdorff.

Du kan ikkje bruke resultat frå pensum utan å bevise dei. [5]

b) La $(X, \mathcal{O}_X)$ og $(Y, \mathcal{O}_Y)$ vere topologiske rom. La $X \times Y$ vere utstyrt med produkttopologien $\mathcal{O}_{X \times Y}$. Vis at avbildinga

$$X \times Y \xrightarrow{p} X$$

gitt ved $(x, y) \mapsto x$ er kontinuerleg. [5]

c) La $(X, \mathcal{O}_X)$ vere eit topologisk rom. Anta at det finnast element $x, x' \in X$, ulik kvarandre, slik at følgjande held.

(1) Det er ein veg frå x til x' i X.

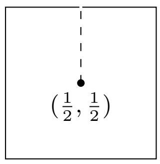
(2) For kvar $x'' \in X$ er det anten ein veg frå x til x'' i X eller ein veg frå x' til x'' i X.

Vis at $(X, \mathcal{O}_X)$ er vegsamanhengande.

Du kan benytte utan bevis resultat frå pensum. [5]

d) La

$$Y = I^2 \setminus \{(x, y) \in I^2 \mid x = \frac{1}{2} \text{ og } y > \frac{1}{2}\}.$$



La Y vere utstyrt med underromstopologien $\mathcal{O}_Y$ med omsyn på $(I^2, \mathcal{O}_{I^2})$. Er $(Y, \mathcal{O}_Y)$ samanhengande? Grunngjev svaret.

Du kan benytte utan bevis resultat frå pensum. [5]

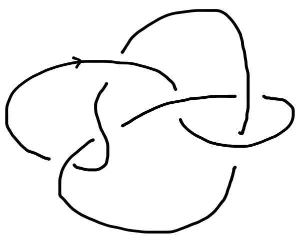
e) Er $(Y, \mathcal{O}_Y)$ lokalkompakt? Grunngjev svaret.

Du kan benytte utan bevis resultat frå pensum. [5]

Oppgåve 4

a) Definer ein knute. [3]

b) Rekn ut vridinga (the writhe) til den orienterte knuten gitt under. [5]



c) Har to isotopiske knutar nødvendigvis same vriding (writhe)? Gje eit bevis eller eit moteksempel. [5]

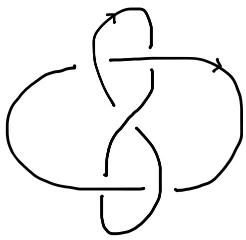
d) Skein-relasjonane som tilfredsstiller Jones-polynomet til ei orientert lenkje er som følger.

1) $V_{\bigcirc}(t) = 1$

unknot

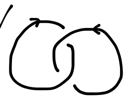
2) $t^{-1} V$  $(t) - t\, V$  $(t) = (t^{1/2} - t^{-1/2})\, V$  (t)

Bruk skein-relasjonane, eller bruk andre metodar, for å rekne ut Jones-polynomet til den orienterte lenkja gitt under.

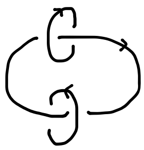


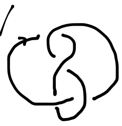
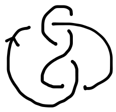
Du kan anta utan bevis følgjande Jones-polynomane. [10]

$$V_{\bigcirc\,\bigcirc}(t) = -t^{-1/2} - t^{1/2}$$

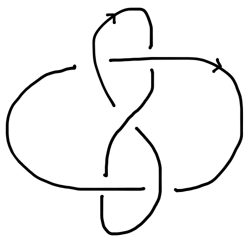
V  $(t) = -t^{5/2} - t^{1/2}$

V  $(t) = -t^{-5/2} - t^{-1/2}$

V  $(t) = t^{-2} + 2 + t^{2}$

V  $(t) = V$  $(t) = t^{-2} - t^{-1} + 1 - t + t^{2}$

e) Er den orienterte lenkja

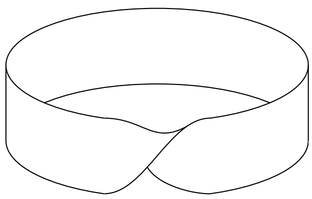


frå d) isotopisk med speglbiletet sitt? Grunngjev svaret.

Du kan benytte utan bevis resultat frå pensum. [2]

Oppgåve 5

a) Definer ein ekvivalensrelasjon $\sim$ på I^2 slik at $(I^2/\sim, \mathcal{O}_{I^2/\sim})$ er Möbius-bandet. [3]



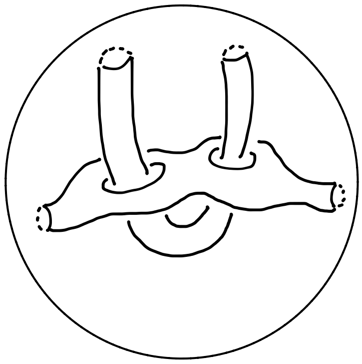
b) Vis at Möbius-bandet er kompakt og samanhengande.

Du kan anta at $(I, \mathcal{O}_I)$ er kompakt og samanhengande, men du må grunngje kvifor eventuelle andre topologiske rom som dukkar opp i argumentasjonen er kompakt eller samanhengande.

Du kan benytte utan bevis resultat frå pensum, men du kan ikkje anta at Möbius-bandet kan sjåast på som ei delmengde av $\mathbb{R}^n$ for nokon $n \geq 0$, med mindre du kan bevise det. [6]

c) Er Möbius-bandet ei flate? [4]

d) Utfør etterfølgande kirurgier på det topologiske rommet $(X, \mathcal{O}_X)$ gitt under — ei 2-sfære med tuneller — til du oppnår eit topologisk rom som er homeomorf med 2-sfæra $(S^2, \mathcal{O}_{S^2})$.



Teikn ein illustrasjon for kvar kirurgi og gje kvar illustrasjon ein kort bilettekst. [7]

e) Ved å nytte resultata over, eller på andre måter, bestem Euler-karakteristikken til $(X, \mathcal{O}_X)$. Du kan benytte utan bevis resultat frå pensum. [5]