Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Petter Andreas Bergh
Telefon: 7359 0483

Eksamen i fag MA1301 Tallteori

Bokmål
Onsdag 26. mai 2004
Kl. 09.00-13.00

Hjelpemidler: ingen hjelpemidler tillatt

Sensur faller 16.06.2004.

Alle svar skal begrunnes.

Oppgave 1

a) Beregn $\gcd(90, 297)$, og finn to tall $a, b \in \mathbb{Z}$ slik at

$$\gcd(90, 297) = 90a + 297b.$$

b) På et foredrag av Sabelprisvinneren Mikael Satya kom 90 professorer og 297 studenter. Inngangsprisene var satt slik at alle professorene betalte like mye, og alle studentene betalte like mye (men studentene betalte ikke nødvendigvis like mye som professorene). Prisene var i hele kroner, og tilsammen ble det betalt inn mellom 2380 og 2390 kroner. Forklar hvorfor det ble betalt inn nøyaktig 2385 kroner.

c) Hva var inngangsprisene?

Oppgave 2 I et RSA-krypteringssystem er den offentlige krypteringsnøkkelen gitt ved $\{n, e\} = \{65, 11\}$, hvor $65 = 5 \cdot 13$. Finn den hemmelige dekrypteringsnøkkelen $\{n, d\}$.

Oppgave 3

a) La $a \in \mathbb{Z}$ og $n \in \mathbb{N}$ være to tall med $\gcd(a, n) = 1$. Et tall $b \in \mathbb{Z}$ sies å være *en invers av a modulo n* dersom $ab \equiv 1 (\bmod n)$. Vis ved hjelp av Eulers Teorem at en slik invers alltid eksisterer. Finn en invers av 16 modulo 35.

b) Hva får vi til rest når vi deler 80^{241} på 77?

Oppgave 4

a) Forklar hvorfor (uten å regne) den lineære kongruensen $63x \equiv 1 (\bmod 11)$ er løsbar. Finn alle løsningene.

b) Finn alle løsningene av systemet

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 (\bmod 7) \\ x &\equiv 2 (\bmod 9) \\ x &\equiv 1 (\bmod 11) \end{aligned}$$

av lineære kongruenser.

Oppgave 5

a) Fibonaccifølgen $f_1, f_2, f_3, \ldots$ defineres ved

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 \\ f_2 &= 1 \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} \qquad \text{for } n \geq 3. \end{aligned}$$

La $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ og $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Vis at

$$f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

for alle $n \geq 1$ (hint: α og β er røtter i polynomet $x^2 - x - 1$).

b) Bruk resultatet i (a) til å vise at

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f_i = f_{2n}$$

for alle $n \geq 1$, hvor vi setter $f_0 = 0$ (hint: binomialformelen).