

Faglig kontakt under eksamen: Petter Andreas Bergh  
Telefon: 7359 0483

Eksamen i fag MA1301 Tallteori  
Bokmål  
Mandag 30. mai 2005  
Kl. 09.00-13.00

Hjelpemidler: ingen hjelpemidler tillatt

Sensur faller 20.06.2005.

Alle svar skal begrunnes.

**Oppgave 1**

- a) Beregn  $\gcd(483, 336)$ , og finn to tall  $a, b \in \mathbb{Z}$  slik at

$$\gcd(483, 336) = 483a + 336b.$$

- b) Forklar hvorfor den Diofantiske ligningen

$$483x + 336y = 42$$

er løsbar, og finn alle løsningene.

**Oppgave 2** Vis at  $16 \mid (n^4 - 1)$  for alle oddetall  $n$ .

**Oppgave 3**

- a) Hva får vi til rest når vi deler  $25^{122}$  på 72?

- b) Avgjør om 3 er en primitiv rot av 14. Hvor mange (inkongruente) primitive røtter har 29?

**Oppgave 4** Definer tallfølgen  $a_1, a_2, a_3, \dots$  ved

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} \quad \text{for } n \geq 4.$$

Vis at  $a_n < 2^n$  for alle  $n$ .

**Oppgave 5**

a) Forklar hvorfor (uten å regne) den lineære kongruensen

$$25x \equiv 1 \pmod{72}$$

er løsbar, og finn alle løsningene.

b) I et RSA-krypteringssystem er den hemmelige dekrypteringsnøkkelen gitt ved  $\{n, d\} = \{91, 25\}$ , hvor  $91 = 7 \cdot 13$ . Finn den offentlige krypteringsnøkkelen  $\{n, e\}$ .

**Oppgave 6** Finn alle heltall som gir rest 3, 1 og 2 ved divisjon med henholdsvis 5, 8 og 9. Hva er det minste positive slike tallet?

**Oppgave 7** Vis at dersom  $a, b, c$  og  $d$  er heltall slik at 5 deler  $(a^4 + b^4 + c^4 + d^4)$ , så må 5 dele  $a, b, c$  og  $d$ .