Forelesning 2 — torsdag den 21. august

1.5 Flere eksempler på bevis ved induksjon

Proposisjon 1.5.1. La n være et naturlig tall. Da er

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

Bevis. Først sjekker vi om proposisjonen er sann når $n = 1$. I dette tilfellet er utsagnet at $1 = 2^1 - 1$. Siden

$$2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$$

er dette sant.

Anta nå at proposisjonen har blitt bevist for et gitt heltall m større enn eller likt 1. Således har det blitt bevist at

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{m-1} = 2^m - 1.$$

Da er

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{m-1} + 2^m &= (2^m - 1) + 2^m \\ &= (2^m + 2^m) - 1 \\ &= (2 \cdot 2^m) - 1 \\ &= 2^{m+1} - 1. \end{aligned}$$

Dermed er proposisjonen sann for det naturlige tallet $m + 1$.

Ved induksjon konkluderer vi at proposisjonen er sann for alle naturlige tall. $\square$

Eksempel 1.5.2. Når $n = 2$, fastslår Proposisjon 1.5.1 at

$$1 + 2 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3.$$

Eksempel 1.5.3. Når $n = 3$, fastslår Proposisjon 1.5.1 at

$$1 + 2 + 4 = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7.$$

Eksempel 1.5.4. Når $n = 6$, fastslår Proposisjon 1.5.1 at

$$1 + 2 + \cdots + 32 = 2^6 - 1 = 64 - 1 = 63.$$

Eksempel 1.5.5. Når $n = 57$, fastslår Proposisjon 1.5.1 at

$$1 + 2 + \cdots + 2^{56} = 2^{57} - 1 = 144115188075855872 - 1 = 144115188075855871.$$

Merknad 1.5.6. Den viktigste delen av beviset for Proposisjon 1.5.1 er ligningen

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{m-1} + 2^m = (2^m - 1) + 2^m.$$

Det er her vi benytter antakelsen at

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{m-1} = 2^m - 1.$$

De andre linjene er bare algebraiske manipulasjoner.

Proposisjon 1.5.7. La n være et naturlig tall. Da er

$$1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Bevis. Først sjekker vi om proposisjonen er sann når $n = 1$. I dette tilfellet er utsagnet at

$$1 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot \big((2 \cdot 1) + 1\big)}{6}.$$

Siden

$$\frac{1 \cdot (1+1) \cdot \big((2 \cdot 1) + 1\big)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

er dette sant.

Anta nå at proposisjonen har blitt bevist for et gitt heltall m større enn eller likt 1. Således har det blitt bevist at

$$1 + 4 + 9 + \cdots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

Da er

$$\begin{aligned}
1 + 4 + 9 + \cdots + m^2 + (m+1)^2 &= \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2 \\
&= \frac{m(m+1)(2m+1) + 6(m+1)^2}{6} \\
&= \frac{(m+1) \cdot \big(m(2m+1) + 6(m+1)\big)}{6} \\
&= \frac{(m+1) \cdot \big(2m^2 + 7m + 6\big)}{6} \\
&= \frac{(m+1) \cdot \big((m+2) \cdot (2m+3)\big)}{6} \\
&= \frac{(m+1) \cdot \big((m+1) + 1\big) \cdot \big(2(m+1) + 1\big)}{6}.
\end{aligned}$$

Dermed er proposisjonen sann for det naturlige tallet $m + 1$.

Ved induksjon konkluderer vi at proposisjonen er sann for alle naturlige tall. □

Eksempel 1.5.8. Når $n = 2$, fastslår Proposisjon 1.5.7 at

$$1 + 4 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{2} = \frac{30}{6} = 5.$$

Eksempel 1.5.9. Når $n = 3$, fastslår Proposisjon 1.5.7 at

$$1 + 4 + 9 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 7}{6} = \frac{84}{6} = 14.$$

Eksempel 1.5.10. Når $n = 6$, fastslår Proposisjon 1.5.7 at

$$1 + 4 + \cdots + 36 = \frac{6 \cdot 7 \cdot 13}{6} = \frac{546}{6} = 91.$$

Eksempel 1.5.11. Når $n = 57$, fastslår Proposisjon 1.5.7 at

$$1 + 4 + \cdots + 3249 = \frac{57 \cdot 58 \cdot 115}{6} = \frac{380190}{6} = 63365.$$

Merknad 1.5.12. Den viktigste delen av beviset for Proposisjon 1.5.7 er ligningen

$$1 + 4 + 9 + \cdots + m^2 + (m+1)^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2.$$

Det er her vi benytter antakelsen at

$$1 + 4 + 9 + \cdots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

De andre linjene er bare algebraiske manipulasjoner.

Merknad 1.5.13. Alle proposisjonene vi har sett så langt er sanne for alle naturlige tall, altså alle heltall større enn eller like 1. Derfor begynte bevisene ved induksjon for alle disse proposisjonene med å sjekke om utsagnene er sanne når $n = 1$.

Neste skal vi bevise ved induksjon en proposisjon som er sann for alle naturlige tall større enn eller like 2. Derfor skal vi begynne beviset med å sjekke om proposisjonen er sann når $n = 2$.

Husk at induksjon kan brukes for å bevise en proposisjon for alle naturlige tall større enn eller like et hvilket som helst gitt heltall.

Proposisjon 1.5.14. La n være et naturlig tall som er større enn eller likt 2. Da er $n^2 > n + 1$.

Bevis. Først sjekker vi om proposisjonen er sann når $n = 2$. I dette tilfellet er utsagnet at

$$2^2 > 2 + 1.$$

Siden $2^2 = 4$ og $2 + 1 = 3$, er dette sant.

Anta nå at proposisjonen har blitt bevist for et gitt heltall m større enn eller likt 2. Således har det blitt bevist at

$$m^2 > m + 1.$$

Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Vi har:

$$\begin{aligned}(m+1)^2 &= (m+1)\cdot(m+1)\\ &= m^2+2m+1.\end{aligned}$$

(2) Siden $m > 0$, er $2m > 0$. Derfor er

$$m^2+2m+1 > m^2+1.$$

(3) Fra antakelsen at

$$m^2 > m+1,$$

følger det at

$$m^2+1 > (m+1)+1.$$

Fra (1) – (3) deduserer vi at

$$(m+1)^2 > (m+1)+1.$$

Således er proposisjonen sann for det naturlige tallet $m+1$.

Ved induksjon konkluderer vi at proposisjonen er sann for alle naturlige tall større enn eller like 2. □

Eksempel 1.5.15. Når $n = 3$, fastslår Proposisjon 1.5.14 at

$$9 > 4.$$

Eksempel 1.5.16. Når $n = 4$, fastslår Proposisjon 1.5.14 at

$$16 > 5.$$

Eksempel 1.5.17. Når $n = 57$, fastslår Proposisjon 1.5.14 at

$$3249 > 58.$$

Merknad 1.5.18. Observasjon (3), hvor vi benytter antakelsen at

$$m^2 > m+1,$$

er den viktigste delen av beviset for Proposisjon 1.5.14.

1.6 Summetegnet

Notasjon 1.6.1. La k og l være heltall. For hvert heltall i slik at $k \leq i \leq l$, la z_i være et heltall. Noen ganger skriver vi summen

$$z_k + z_{k+1} + \cdots + z_l$$

som

$$\sum_{i=k}^{l} z_i.$$

Terminologi 1.6.2. Symbolet $\sum$ kalles *summetegn*.

Eksempel 1.6.3. La n være et naturlig tall. Summen

$$1 + 2 + \cdots + n,$$

som vi tok for oss i Proposisjon 1.4.5, kan skrives

$$\sum_{i=1}^{n} i.$$

Eksempel 1.6.4. La m være et naturlig tall. Summen

$$1 + 2 + \cdots + m,$$

som vi også tok for oss i Proposisjon 1.4.5, kan skrives

$$\sum_{i=1}^{m} i.$$

Eksempel 1.6.5. La m være et naturlig tall. Summen

$$1 + 2 + \cdots + (m+1),$$

som vi igjen tok for oss i Proposisjon 1.4.5, kan skrives

$$\sum_{i=1}^{m+1} i.$$

Eksempel 1.6.6. La n være et naturlig tall. Summen

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1},$$

som vi tok for oss i Proposisjon 1.5.1, kan skrives

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1}.$$

Den kan også skrives

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2^{i}.$$

Eksempel 1.6.7. La m være et naturlig tall. Summen

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{m-1},$$

som vi også tok for oss i Proposisjon 1.5.1, kan skrives

$$\sum_{i=1}^{m} 2^{i-1}.$$

Den kan også skrives

$$\sum_{i=0}^{m-1} 2^{i}.$$

Eksempel 1.6.8. La m være et naturlig tall. Summen

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{m},$$

som vi igjen tok for oss i Proposisjon 1.5.1, kan skrives

$$\sum_{i=1}^{m+1} 2^{i-1}.$$

Den kan også skrives

$$\sum_{i=0}^{m} 2^{i}.$$

Eksempel 1.6.9. La n være et naturlig tall. Summen

$$1 + 4 + 9 + \cdots + n^{2},$$

som vi tok for oss i Proposisjon 1.5.7, kan skrives

$$\sum_{i=1}^{n} i^{2}.$$

Eksempel 1.6.10. La m være et naturlig tall. Summen

$$1 + 4 + 9 + \cdots + m^{2},$$

som vi også tok for oss i Proposisjon 1.5.7, kan skrives

$$\sum_{i=1}^{m} i^{2}.$$

Eksempel 1.6.11. La m være et naturlig tall. Summen

$$1 + 4 + 9 + \cdots + (m+1)^2,$$

som vi igjen tok for oss i Proposisjon 1.5.7, kan skrives

$$\sum_{i=1}^{m+1} i^2.$$

Eksempel 1.6.12. La n og k være naturlige tall. I den neste delen av kapittelet skal vi jobbe med summer som ligner på

$$\big(1 \times 2 \times \cdots \times k\big) + \big(2 \times 3 \times \cdots \times (k+1)\big) + \cdots + \big(n \times (n+1) \times \cdots \times (n+k-1)\big).$$

Denne summen kan skrives

$$\sum_{i=1}^{n} i \times (i+1) \times \cdots \times (i+k-1).$$

Eksempel 1.6.13. La m og k være naturlige tall. Summen

$$\big(1 \times 2 \times \cdots \times k\big) + \big(2 \times 3 \times \cdots \times (k+1)\big) + \cdots + \big(m \times (m+1) \times \cdots \times (m+k-1)\big)$$

kan skrives

$$\sum_{i=1}^{m} i \times (i+1) \times \cdots \times (i+k-1).$$

Eksempel 1.6.14. La m og k være naturlige tall. Summen

$$\big(1 \times 2 \times \cdots \times k\big) + \big(2 \times 3 \times \cdots \times (k+1)\big) + \cdots + \big((m+1) \times (m+2) \times \cdots \times (m+k)\big)$$

kan skrives

$$\sum_{i=1}^{m+1} i \times (i+1) \times \cdots \times (i+k-1).$$

1.7 Et eksempel til på bevis ved induksjon

Proposisjon 1.7.1. La n og k være naturlige tall. Da er

$$\sum_{i=1}^{n} i \times (i+1) \times \cdots \times (i+k-1) = \frac{n \times (n+1) \times \cdots \times (n+k)}{k+1}.$$

Bevis. Først sjekker vi om proposisjonen er sann når $n = 1$. I dette tilfellet er utsagnet at

$$1 \times 2 \times \cdots \times k = \frac{1 \times (1+1) \times \cdots \times (1+k)}{k+1}.$$

Siden

$$\begin{aligned}\frac{1 \times (1+1) \times \cdots \times (1+k)}{k+1} &= \frac{1 \times 2 \times \cdots \times (k+1)}{k+1} \\ &= 1 \times 2 \times \cdots \times k\end{aligned}$$

er dette sant.

Anta nå at proposisjonen har blitt bevist når n er et gitt naturlig tall m. Således har det blitt bevist at

$$\sum_{i=1}^{m} i \times (i+1) \times \cdots \times (i+k-1) = \frac{m(m+1)\dots(m+k)}{k+1}.$$

Da er

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m+1} i \times (i+1) \times \cdots \times (i+k-1) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{m} i \times (i+1) \times \cdots \times (i+k-1)\right) + (m+1) \times (m+2) \times \dots (m+k) \\ &= \frac{m \times (m+1) \times \cdots \times (m+k)}{k+1} + (m+1) \times (m+2) \times \cdots \times (m+k) \\ &= \frac{\big(m \times (m+1) \times \cdots \times (m+k)\big) + \big((k+1) \times (m+1) \times (m+2) \times \cdots \times (m+k)\big)}{k+1} \\ &= \frac{\big((m+1) \times \cdots \times (m+k)\big)\big(m+(k+1)\big)}{k+1} \\ &= \frac{(m+1) \times (m+2) \times \cdots \times (m+k+1)}{k+1}.\end{aligned}$$

Dermed er proposisjonen sann når n er det naturlige tallet $m+1$.

Ved induksjon konkluderer vi at proposisjonen er sann for alle naturlige tall n og alle naturlige tall k. □

Eksempel 1.7.2. Når $n = 2$ og $k = 3$, fastslår Proposisjon 1.7.1 at

$$1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 = \frac{2 \times 3 \times 4 \times 5}{4} = \frac{120}{4} = 30.$$

Eksempel 1.7.3. Når $n = 2$ og $k = 4$, fastslår Proposisjon 1.7.1 at

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 + 2 \times 3 \times 4 \times 5 = \frac{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}{5} = \frac{720}{5} = 144.$$

Eksempel 1.7.4. Når $n = 2$ og $k = 6$, fastslår Proposisjon 1.7.1 at

$$1 \times 2 \times \cdots \times 6 + 2 \times 3 \times \cdots \times 7 = \frac{2 \times 3 \times \dots 8}{7} = \frac{40320}{7} = 5760.$$

Eksempel 1.7.5. Når $n = 3$ og $k = 2$, fastslår Proposisjon 1.7.1 at

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 = \frac{3 \times 4 \times 5}{3} = \frac{60}{3} = 20.$$

Eksempel 1.7.6. Når $n = 3$ og $k = 3$, fastslår Proposisjon 1.7.1 at

$$1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + 3 \times 4 \times 5 = \frac{3 \times 4 \times 5 \times 6}{4} = \frac{360}{4} = 90.$$

Eksempel 1.7.7. Når $n = 3$ og $k = 6$, fastslår Proposisjon 1.7.1 at

$$\begin{aligned} 1 \times 2 \times \cdots \times 6 + 2 \times 3 \times \cdots \times 7 + 3 \times 4 \times \cdots \times 8 &= \frac{3 \times 4 \times \cdots \times 9}{7} \\ &= \frac{181440}{7} \\ &= 25920. \end{aligned}$$

Eksempel 1.7.8. Når $n = 4$ og $k = 2$, fastslår Proposisjon 1.7.1 at

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 = \frac{4 \times 5 \times 6}{3} = \frac{120}{3} = 40.$$

Eksempel 1.7.9. Når $n = 4$ og $k = 3$, fastslår Proposisjon 1.7.1 at

$$\begin{aligned} 1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + 3 \times 4 \times 5 + 4 \times 5 \times 6 &= \frac{4 \times 5 \times 6 \times 7}{4} \\ &= \frac{840}{4} \\ &= 210. \end{aligned}$$

Eksempel 1.7.10. Når $n = 4$ og $k = 6$, fastslår Proposisjon 1.7.1 at

$$\begin{aligned} 1 \times 2 \times \cdots \times 6 + 2 \times 3 \times \cdots \times 7 + 3 \times 4 \times \cdots \times 8 + 4 \times 5 \times \cdots \times 9 &= \frac{4 \times 5 \times \cdots \times 10}{7} \\ &= \frac{604800}{7} \\ &= 86400. \end{aligned}$$

Eksempel 1.7.11. Når $n = 6$ og $k = 2$, fastslår Proposisjon 1.7.1 at

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + 6 \times 7 = \frac{6 \times 7 \times 8}{3} = \frac{336}{3} = 112.$$

Eksempel 1.7.12. Når $n = 6$ og $k = 3$, fastslår Proposisjon 1.7.1 at

$$\begin{aligned} 1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \cdots + 6 \times 7 \times 8 &= \frac{6 \times 7 \times 8 \times 9}{4} \\ &= \frac{3024}{4} \\ &= 756. \end{aligned}$$

Eksempel 1.7.13. Når $n = 6$ og $k = 6$, fastslår Proposisjon 1.7.1 at

$$\begin{aligned}1 \times 2 \times \cdots \times 6 + 2 \times 3 \times \cdots \times 7 + \cdots + 6 \times 7 \times \cdots \times 11 &= \frac{6 \times 7 \times \cdots \times 12}{7} \\ &= \frac{3991680}{7} \\ &= 570240.\end{aligned}$$

Merknad 1.7.14. Ligningen

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{i=1}^{m} i \times (i+1) \times \cdots \times (i+k-1)\right) + (m+1) \times (m+2) \times \ldots (m+k) \\ &= \frac{m \times (m+1) \times \cdots \times (m+k)}{k+1} + (m+1) \times (m+2) \times \cdots \times (m+k)\end{aligned}$$

er den viktigste delen av beviset for Proposisjon 1.7.1. Det er her vi benytter antakelsen at

$$\sum_{i=1}^{m} i \times (i+1) \times \cdots \times (i+k-1) = \frac{m \times (m+1) \times \cdots \times (m+k)}{k+1}.$$

Merknad 1.7.15. Proposisjon 1.7.1 for tilfellet $k = 1$ er det samme som Proposisjon 1.4.5. Beviset på Proposisjon 1.7.1 generaliserer beviset for Proposisjon 1.4.5.

Merknad 1.7.16. Proposisjon 1.7.1 gjelder to variabler n og k, og bevis ved induksjon i slike tilfeller kan til å begynne med se litt forvirrende ut. La oss derfor se på logikken bak beviset for Proposisjon 1.7.1.

Da vi sjekket om Proposisjon 1.7.1 er sann når $n = 1$, var k et *hvilket som helst* naturlig tall. Da vi deretter antok at Proposisjon 1.7.1 er sann når n er et gitt naturlig tall m, og viste at den da er sann når $n = m + 1$, var k også et *hvilket som helst* naturlig tall.

Dermed kan vi se på beviset for Proposisjon 1.7.1 på følgende måte. Først velger vi et naturlig tall k: la for eksempel k være 5. Da blir utsagnet:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot (i+1) \cdot \cdots \cdot (i+4) = \frac{n(n+1) \cdots (n+5)}{6}.$$

Så beviser vi at dette er sant, ved å erstatte k med 5 i beviset for Proposisjon 1.7.1.

Først sjekker vi om utsagnet er sant når $n = 1$. Vi må altså sjekke om

$$1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 5 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot \cdots \cdot (1+5)}{6}.$$

Siden

$$\begin{aligned}\frac{1 \cdot (1+1) \cdot \cdots \cdot (1+5)}{6} &= \frac{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 6}{6} \\ &= 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 5\end{aligned}$$

er dette sant.

Anta nå at det har blitt beviset at utsagnet er sant når n er et gitt naturlig tall m. Således har det blitt bevist at

$$\sum_{i=1}^{m} i \cdot (i+1) \cdot \dots \cdot (i+4) = \frac{m(m+1)\cdots(m+5)}{6}.$$

Da er

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m+1} i \cdot (i+1) \cdot \dots \cdot (i+4) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m} i \cdot (i+1) \cdot \dots \cdot (i+4) \right) + (m+1) \cdot (m+2) \cdot \ldots (m+5) \\
&= \frac{m(m+1)\cdots(m+5)}{6} + (m+1) \cdot (m+2) \cdot \dots \cdot (m+5) \\
&= \frac{m(m+1)\cdots(m+5) + 6 \cdot (m+1) \cdot (m+2) \cdot \dots \cdot (m+5)}{6} \\
&= \frac{\big((m+1) \cdot \dots \cdot (m+5)\big)\big(m+6\big)}{6} \\
&= \frac{(m+1) \cdot (m+2) \cdot \dots \cdot (m+6)}{6}.
\end{aligned}$$

Dermed er utsagnet sant når n er det naturlige tallet $m+1$.

Ved induksjon konkluderer vi at utsagnet er sant når n er et hvilket som helst naturlig tall.

Merknad 1.7.17. I prinsippet kan vi bytte om rollene til n og k i beviset for Proposisjon 1.7.1. Det vil si at vi i teorien kan gjøre følgende:

(1) Sjekke om Proposisjon 1.7.1 er sann når $k = 1$, og når n er et hvilket som helst naturlig tall.

(2) Anta så at Proposisjon 1.7.1 er sann når k er et gitt naturlig tall m, og når n er et hvilket som helst naturlig tall, og vis at den da er sann når $k = m + 1$, og når n igjen er et hvilket som helst naturlig tall.

Terminologi 1.7.18. Når vi beviser ved induksjon en proposisjon om heltall som involver to eller flere variabler, spiller alltid én variabel den rollen som n har i beviset for Proposisjon 1.7.1, og som k har i tilnærmingsmetoden beskrevet i Merknad 1.7.17. La oss anta at denne spesielle variabelen betegnes t. Da sier vi at proposisjonen har blitt bevist ved *induksjon på* t.

Eksempel 1.7.19. Vi sier at beviset vi ga for Proposisjon 1.7.1 er ved induksjon på n. Hadde vi et bevis for Proposisjon 1.7.1 med tilnærmingsmetoden beskrevet i Merknad 1.7.17, ville vi si at det er et bevis ved induksjon på k.

Oppgaver

O1.1 Oppgaver i eksamens stil

Oppgave O1.1.1. La n være et naturlig tall slik at $n \geq 2$. Bevis at $2n > n + 1$.

Oppgave O1.1.2. La n være et naturlig tall. Bevis at

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$

Oppgave O1.1.3. La n være et naturlig tall. Bevis at

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Oppgave O1.1.4. La x og n være naturlige tall. Bevis at

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

O1.2 Oppgaver for å hjelpe med å forstå forelesningen

Oppgave O1.2.4. Hva fastslår Proposisjon 1.5.1 når $n = 4$?

Oppgave O1.2.5. Gjør det samme som i Merknad 1.4.11 for Proposisjon 1.5.1. Med andre ord, beskriv hvordan algoritmen i Merknad 1.4.3 ser ut for Proposisjon 1.5.1.

Oppgave O1.2.6. Hva fastslår Proposisjon 1.5.7 når $n = 4$?

Oppgave O1.2.7. Gjør det samme som i Merknad 1.4.11 for Proposisjon 1.5.7. Med andre ord, beskriv hvordan algoritmen i Merknad 1.4.3 ser ut for Proposisjon 1.5.7.

Oppgave O1.2.8. Hva fastslår Proposisjon 1.5.14 når $n = 5$?

Oppgave O1.2.9. Gjør det samme som i Merknad 1.4.11 for Proposisjon 1.5.14. Med andre ord, beskriv hvordan algoritmen i Bemarking 1.4.3 ser ut for Proposisjon 1.5.14.

Oppgave O1.2.10. Skriv følgende summene ved å bruke summetegnet.

(1) - 9 - 6 - 3 + 0 + 3 + 6 + 9 + 12 + 15.

(2) 1 + 5 + 9 + 13 + . . . + 53.

Oppgave O1.2.11. Skriv summene

$$\sum_{i=3}^{9} 4i$$

og

$$\sum_{i=0}^{7} \left(3^i + i\right)$$

uten å bruke summetegnet.

Oppgave O1.2.12. Hva fastslår Proposisjon 1.7.1 når $n = 5$ og $k = 3$? Hva fastslår den når $n = 5$ og $k = 5$?

Oppgave O1.2.13. Skriv utsagnet i Proposisjon 1.7.1 når $k = 3$ uten å bruke summetegnet. Skriv så et bevis for dette utsagnet ved å erstatte k med 3 i beviset for Proposisjon 1.7.1, uten å bruke summetegnet. *Tips*: Se på Merknad 1.7.16.