Forelesning 3 — mandag den 25. august

Merknad 1.7.1. For å bevise en proposisjon om heltall som involverer to eller flere variabler, er det typisk mye lettere å benytte induksjon på en av variablene enn induksjon på noen av de andre. Det er for eksempel ikke lett å bevise Proposisjon 1.7.1 ved induksjon på k, altså med tilnærmingsmetoden beskrevet i Merknad 1.7.17.

1.8 Fakultet

Definisjon 1.8.1. La n være et naturlig tall. Da er n *fakultet* produktet

$$1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n.$$

I tillegg definerer vi 0 *fakultet* til å være 1.

Notasjon 1.8.2. La n være et heltall slik at $n \geq 0$. Vi betegner n fakultet som «$n!$».

Eksempel 1.8.3. Vi har: $1! = 1$.

Eksempel 1.8.4. Siden $1 \times 2 = 2$, er $2! = 2$.

Eksempel 1.8.5. Siden $1 \times 2 \times 3 = 6$, er $3! = 6$.

Eksempel 1.8.6. Siden $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$, er $4! = 24$.

1.9 Binomialkoeffisienter og binomialteoremet

Merknad 1.9.1. Fra skolen kjenner du til ligningen

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Nå skal vi se på en tilsvarende ligning for $(x+y)^n$, hvor n er et hvilket som helst naturlig tall. Først må vi gjøre noen forberedelser.

Definisjon 1.9.2. La n være et naturlig tall, og la k være et heltall slik at $0 \leq k \leq n$. Da er *binomialkoeffisienten av n og k* brøken

$$\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Notasjon 1.9.3. Vi betegner binomialkoeffisienten av n og k som

$$\binom{n}{k}.$$

Merknad 1.9.4. Symbolet $\binom{n}{k}$ leses (temmelig ugrammatisk!) som ≪n velg k≫. Dette kommer av at det kan bevises at $\binom{n}{k}$ er antall muligheter for å velge ut k ting fra n ting. På grunn av denne tolkningen blir binomialkoeffisientene brukt mye i et område innen matematikken som kalles *kombinatorikk*.

Eksempel 1.9.5. Vi har:

$$\begin{aligned}\binom{4}{2} &= \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} \\ &= \frac{4!}{2! \cdot 2!} \\ &= \frac{24}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{24}{4} \\ &= 6.\end{aligned}$$

Eksempel 1.9.6. Vi har:

$$\begin{aligned}\binom{5}{3} &= \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} \\ &= \frac{5!}{3! \cdot 2!} \\ &= \frac{120}{6 \cdot 2} \\ &= \frac{120}{12} \\ &= 10.\end{aligned}$$

Merknad 1.9.7. Bevisene av de følgende proposisjonene er enkle utregniner, og induksjon behøves ikke.

Proposisjon 1.9.8. La n være et naturlig tall. Da er $\binom{n}{0} = 1$.

Bevis. Vi regner som følger:

$$\begin{aligned}\binom{n}{0} &= \frac{n!}{0! \cdot (n-0)!} \\ &= \frac{n!}{0! \cdot n!} \\ &= \frac{n!}{1 \cdot n!} \\ &= \frac{n!}{n!} \\ &= 1.\end{aligned}$$

□

Proposisjon 1.9.9. La n være et naturlig tall. Da er $\binom{n}{1} = n$.

Bevis. Vi regner som følger:

$$\begin{aligned}\binom{n}{1} &= \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} \\ &= \frac{n!}{1 \cdot (n-1)!} \\ &= \frac{n!}{(n-1)!} \\ &= \frac{1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n}{1 \times 2 \times \cdots \times (n-2) \times (n-1)} \\ &= n.\end{aligned}$$

□

Proposisjon 1.9.10. La n være et naturlig tall, og la k være et heltall slik at $0 \leq k \leq n$. Da er $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Bevis. Vi regner som følger:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)! \cdot \big(n-(n-k)\big)!} \\ &= \binom{n}{n-k}.\end{aligned}$$

□

Korollar 1.9.11. La n være et naturlig tall. Da er $\binom{n}{n} = 1$.

Bevis. På grunn av Proposisjon 1.9.10 er $\binom{n}{n} = \binom{n}{0}$. På grunn av Proposisjon 1.9.8 er $\binom{n}{0} = 1$. Således konkluderer vi at $\binom{n}{n} = 1$. □

Korollar 1.9.12. La n være et naturlig tall. Da er $\binom{n}{n-1} = n$.

Bevis. Ut ifra Proposisjon 1.9.10 er $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1}$. Ut ifra Proposisjon 1.9.9, er $\binom{n}{1} = n$. Således konkluderer vi at $\binom{n}{n-1} = n$. □

Eksempel 1.9.13. Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Ut ifra Proposisjon 1.9.8 er $\binom{2}{0} = 1$.

(2) Ut ifra Proposisjon 1.9.9 er $\binom{2}{1} = 2$.

(3) Ut ifra Korollar 1.9.11 er $\binom{2}{2} = 1$.

Dermed har vi regnet ut $\binom{2}{k}$ for alle mulige verdier av k.

Eksempel 1.9.14. Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Ut ifra Proposisjon 1.9.8 er $\binom{3}{0} = 1$.

(2) Ut ifra Korollar 1.9.11 er $\binom{3}{3} = 1$.

(3) Ut ifra Proposisjon 1.9.9 er $\binom{3}{1} = 3$.

(4) Fra (3) og Korollar 1.9.12, følger det at $\binom{3}{2} = 3$.

Dermed har vi regnet ut $\binom{3}{k}$ for alle mulige verdier av k.

Eksempel 1.9.15. Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Ut ifra Proposisjon 1.9.8 er $\binom{4}{0} = 1$.

(2) Ut ifra Korollar 1.9.11 er $\binom{4}{4} = 1$.

(3) Ut ifra Proposisjon 1.9.9 er $\binom{4}{1} = 4$.

(4) Fra (3) og Korollar 1.9.12, følger det at $\binom{4}{3} = 4$.

(5) Fra Eksempel 1.9.5 har vi: $\binom{4}{2} = 6$.

Dermed har vi regnet ut $\binom{4}{k}$ for alle mulige verdier av k.

Eksempel 1.9.16. Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Ut ifra Proposisjon 1.9.8 er $\binom{5}{0} = 1$.

(2) Ut ifra Korollar 1.9.11 er $\binom{5}{5} = 1$.

(3) Ut ifra Proposisjon 1.9.9 er $\binom{5}{1} = 5$.

(4) Fra (3) og Korollar 1.9.12, følger det at $\binom{5}{4} = 5$.

(5) Fra Eksempel 1.9.6 har vi: $\binom{5}{3} = 10$.

(6) Fra (5) og Proposisjon 1.9.10, følger det at $\binom{5}{2} = 10$.

Dermed har vi regnet ut $\binom{5}{k}$ for alle mulige verdier av k.

Merknad 1.9.17. I alle eksemplene vi har tatt for oss så langt, var $\binom{n}{k}$ er et naturlig tall. Vi skal snart bevise at dette er tilfelle for hvilke som helst n og k.

Proposisjon 1.9.18. La n og k være naturlige tall. Da er

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Bevis. Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Ut ifra definisjonen av $\binom{n}{k}$ og $\binom{n}{k-1}$ i Definisjon 1.9.2, er

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k+1)!}.$$

(2) Siden $k! = (k-1)! \cdot k$ og $(n-k+1)! = (n-k)! \cdot (n-k+1)$, er

$$\begin{aligned}
\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k+1)!} &= \frac{(n-k+1) \cdot n! + k \cdot n!}{k! \cdot (n-k+1)!} \\
&= \frac{n! \cdot (n-k+1+k)}{k! \cdot (n+1-k)!} \\
&= \frac{n! \cdot (n+1)}{k! \cdot (n+1-k)!}.
\end{aligned}$$

(3) Siden $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$, er

$$\frac{n! \cdot (n+1)}{k! \cdot (n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k! \cdot (n+1-k)!}.$$

(4) Ut ifra definisjonen av $\binom{n+1}{k}$ i Definisjon 1.9.2, er

$$\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{k! \cdot (n+1-k)!}.$$

Fra (1) – (4) konkluderer vi at

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

□

Eksempel 1.9.19. Når $n = 3$ og $k = 1$, fastslår Proposisjon 1.9.18 at

$$\binom{3}{1} + \binom{3}{0} = \binom{4}{1},$$

altså at

$$3 + 1 = 4.$$

Eksempel 1.9.20. Når $n = 3$ og $k = 2$, fastslår Proposisjon 1.9.18 at

$$\binom{3}{2} + \binom{3}{1} = \binom{4}{2},$$

altså at

$$3 + 3 = 6.$$

Eksempel 1.9.21. Når $n = 3$ og $k = 3$, fastslår Proposisjon 1.9.18 at

$$\binom{3}{3} + \binom{3}{2} = \binom{4}{3},$$

altså at

$$1 + 3 = 4.$$

Eksempel 1.9.22. Når $n = 5$ og $k = 1$, fastslår Proposisjon 1.9.18 at

$$\binom{5}{1} + \binom{5}{0} = \binom{6}{1},$$

altså at

$$5 + 1 = \binom{6}{1}.$$

Vi deduserer at $\binom{6}{1} = 6$.

Eksempel 1.9.23. Når $n = 5$ og $k = 2$, fastslår Proposisjon 1.9.18 at

$$\binom{5}{2} + \binom{5}{1} = \binom{6}{2},$$

altså at

$$10 + 5 = \binom{6}{2}.$$

Vi deduserer at $\binom{6}{2} = 15$.

Eksempel 1.9.24. Når $n = 5$ og $k = 3$, fastslår Proposisjon 1.9.18 at

$$\binom{5}{3} + \binom{5}{2} = \binom{6}{3},$$

altså at

$$10 + 10 = \binom{6}{3}.$$

Vi deduserer at $\binom{6}{3} = 20$.

Eksempel 1.9.25. Når $n = 5$ og $k = 4$, fastslår Proposisjon 1.9.18 at

$$\binom{5}{4} + \binom{5}{3} = \binom{6}{4},$$

altså at

$$5 + 10 = \binom{6}{4}.$$

Vi deduserer at $\binom{6}{4} = 15$.

Eksempel 1.9.26. Når $n = 5$ og $k = 5$, fastslår Proposisjon 1.9.18 at

$$\binom{5}{5} + \binom{5}{4} = \binom{6}{5},$$

altså at

$$1 + 5 = \binom{6}{5}.$$

Vi deduserer at $\binom{6}{5} = 6$.

Merknad 1.9.27. La oss sette opp binomialkoeffisientene på følgende måte. Det k-te tallet fra venstre, ved å telle k fra 0 til n, i den n-te raden fra toppen, ved å telle n fra 1, er binomialkoeffisienten $\binom{n}{k}$. For eksempel er det andre tallet fra venstre (ved å telle fra 0) i den fjerde raden fra toppen 6, som er binomialkoeffisienten $\binom{4}{2}$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

Proposisjonen 1.9.18 sier at når vi legger sammen to tall i en rad, får vi tallet mellom dem i den neste raden. For eksempel når vi legger sammen tallene 4 og 6 i den fjerde raden, får vi 10, som står mellom 4 og 6 i den femte raden.

Terminologi 1.9.28. Oppsettet av tallene i Merknad 1.9.27 kalles for *Pascals trekant*.

Proposisjon 1.9.29. La n være et naturlig tall, og la k være et heltall slik at $0 \leq k \leq n$. Da er $\binom{n}{k}$ et naturlig tall.

Bevis. Først sjekker vi om proposisjonen er sann når $n = 1$. I dette tilfellet er utsagnet at $\binom{1}{k}$ er et naturlig tall for hvert heltall k slik at $0 \leq k \leq 1$, altså når $k = 0$ og når $k = 1$. Ut ifra Proposisjon 1.9.8 er det sant at $\binom{1}{0}$ er et naturlig tall, og ut ifra Proposisjon 1.9.9 er det sant at $\binom{1}{1}$ er et naturlig tall.

Anta nå at proposisjonen har blitt bevist når n er et gitt naturlig tall m. Således har det blitt bevist at $\binom{m}{k}$ er et naturlig tall for alle heltallene k slik at $0 \leq k \leq m$. Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Ut ifra Proposisjon 1.9.8 er $\binom{m+1}{0}$ et naturlig tall.

(2) La k være et naturlig tall. Fra antakelsen at $\binom{m}{k}$ er et naturlig tall for alle heltallene k slik at $0 \leq k \leq m$, er $\binom{m}{k}$ og $\binom{m}{k-1}$ naturlige tall. Derfor er

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1}$$

et naturlig tall. Ut ifra Proposisjon 1.9.18 vet vi dessuten at

$$\binom{m+1}{k} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k-1}.$$

Vi deduserer at $\binom{m+1}{k}$ er et naturlig tall.

(3) Ut ifra Korollar 1.9.11 er $\binom{m+1}{m+1}$ et naturlig tall.

Dermed er $\binom{m+1}{k}$ et naturlig tall for alle naturlige tall k slik at $0 \leq k \leq m+1$. Således er proposisjonen sann når n er det naturlige tallet $m+1$.

Ved induksjon konkluderer vi at proposisjonen er sann når n er et hvilket som helst naturlig tall.

□

Proposisjon 1.9.30. La x og y være tall. La n være et heltall slik at $n \geq 0$. Da er

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i.$$

Bevis. Først sjekker vi om proposisjonen er sann når $n = 0$. I dette tilfellet er utsagnet at

$$(x+y)^0 = \sum_{i=0}^{0} \binom{0}{i} x^{0-i} y^i.$$

Siden $(x+y)^0 = 1$ og

$$\sum_{i=0}^{0} \binom{0}{i} x^{0-i} y^i = \binom{0}{0} x^{0-0} y^0 = 1 \cdot x^0 y^0 = 1,$$

er dette sant.

Anta nå at proposisjonen har blitt bevist når n er et gitt naturlig tall m. Således har det blitt bevist at

$$(x+y)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} a^{m-i} b^i.$$

Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Vi har:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{m+1} &= (x+y)^m \cdot (x+y) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^{m-i} y^i \right) \cdot (x+y) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^{m-i} y^i \right) \cdot x + \left(\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^{m-i} y^i \right) \cdot y \\
&= \left(\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^{m+1-i} y^i \right) + \left(\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^{m-i} y^{i+1} \right)
\end{aligned}$$

(2) Vi har:

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^{m+1-i} y^i = \binom{m}{0} x^{m+1-0} y^0 + \left(\sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} x^{m+1-i} y^i \right).$$

(3) Ut ifra Proposisjon 1.9.8 er $\binom{m}{0} = 1$. Derfor er

$$\binom{m}{0} x^{m+1-0} y^0 + \left(\sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} x^{m+1-i} y^i \right) = x^{m+1} + \left(\sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} x^{m+1-i} y^i \right).$$

(4) Vi har:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^{m-i} y^{i+1} &= \sum_{i=1}^{m+1} \binom{m}{i-1} x^{m-(i-1)} y^{(i-1)+1} \\
&= \sum_{i=1}^{m+1} \binom{m}{i-1} x^{m+1-i)} y^i \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i-1} x^{m+1-i)} y^i \right) + \binom{m}{(m+1)-1} x^{m+1-(m+1)} y^{m+1} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i-1} x^{m+1-i)} y^i \right) + \binom{m}{m} x^0 y^{m+1}.
\end{aligned}$$

(5) Ut ifra Korollar 1.9.11 er $\binom{m}{m} = 1$. Derfor er:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i-1} x^{m+1-i)} y^i \right) + \binom{m}{m} x^0 y^{m+1} = \left(\sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i-1} x^{m+1-i)} y^i \right) + y^{m+1}.$$

(6) Vi har:

$$x^{m+1} + \left(\sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} x^{m+1-i} y^i \right) + \left(\sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i-1} x^{m+1-i)} y^i \right) + y^{m+1}$$
$$= x^{m+1} + \left(\sum_{i=1}^{m} \left(\binom{m}{i} + \binom{m}{i-1} \right) x^{m+1-y} y^i \right) + y^{m+1}$$

(7) Ut ifra Proposisjon 1.9.18 er

$$\binom{m+1}{i} = \binom{m}{i} + \binom{m}{i-1}$$

for alle heltall i slik at $1 \leq i \leq m$. Vi deduserer at

$$x^{m+1} + \left(\sum_{i=1}^{m} \left(\binom{m}{i} + \binom{m}{i-1} \right) x^{m+1-y} y^i \right) + y^{m+1}$$
$$= x^{m+1} + \left(\sum_{i=1}^{m} \left(\binom{m}{i} + \binom{m}{i-1} \right) x^{m+1-y} y^i \right) y^{m+1}$$
$$= x^{m+1} + \left(\sum_{i=1}^{m} \binom{m+1}{i} x^{m+1-i} y^i \right) + y^{m+1}.$$

Vi deduserer fra (1) – (7) at

$$(x+y)^{m+1} = x^{m+1} + \left(\sum_{i=1}^{m} \binom{m+1}{i} x^{m+1-i} y^i \right) + y^{m+1}.$$

Nå gjør vi følgende observasjoner.

(1) Vi har:

$$\sum_{i=0}^{m+1} \binom{m+1}{i} x^{m+1-i} y^i$$
$$= \binom{m+1}{0} x^{m+1-0} y^0 + \left(\sum_{i=1}^{m} \binom{m+1}{i} x^{m+1-i} y^i \right) + \binom{m+1}{m+1} x^{m+1-(m+1)} y^{m+1}$$
$$= \binom{m+1}{0} x^{m+1} + \left(\sum_{i=1}^{m} \binom{m+1}{i} x^{m+1-i} y^i \right) + \binom{m+1}{m+1} y^{m+1}$$

(2) Ut ifra Proposisjon 1.9.8 er $\binom{m+1}{0} = 1$. Ut ifra Korollar 1.9.11 er $\binom{m+1}{m+1} = 1$. Derfor er

$$\binom{m+1}{0} x^{m+1} + \left(\sum_{i=1}^{m} \binom{m+1}{i} x^{m+1-i} y^i \right) + \binom{m+1}{m+1} y^{m+1}$$
$$= x^{m+1} + \left(\sum_{i=1}^{m} \binom{m+1}{i} x^{m+1-i} y^i \right) + y^{m+1}.$$

Vi deduserer fra (1) – (2) at

$$\sum_{i=0}^{m+1} \binom{m+1}{i} x^{m+1-i} y^i = x^{m+1} + \left(\sum_{i=1}^{m} \binom{m+1}{i} x^{m+1-i} y^i \right) + y^{m+1}.$$

For å oppsummere beviset så langt, har vi fastslått at

$$(x+y)^{m+1} = x^{m+1} + \left(\sum_{i=1}^{m} \binom{m+1}{i} x^{m+1-i} y^i \right) + y^{m+1}$$

og at

$$x^{m+1} + \left(\sum_{i=1}^{m} \binom{m+1}{i} x^{m+1-i} y^i \right) + y^{m+1} = \sum_{i=0}^{m+1} \binom{m+1}{i} x^{m+1-i} y^i.$$

Vi deduserer at

$$(x+y)^{m+1} = \sum_{i=0}^{m+1} \binom{m+1}{i} x^{m+1-i} y^i.$$

Dermed er proposisjonen sann når n er det naturlige tallet $m+1$.

Ved induksjon konkluderer vi at proposisjonen er sann når n er et hvilket som helst naturlig tall.

□

Eksempel 1.9.31. Når $n = 2$, fastslår Proposisjon 1.9.30 at

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2,$$

som forventet.

Eksempel 1.9.32. Når $n = 3$, fastslår Proposisjon 1.9.30 at

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

Eksempel 1.9.33. Når $n = 4$, fastslår Proposisjon 1.9.30 at

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4.$$

Merknad 1.9.34. Proposisjon 1.9.30 kalles noen ganger *binomialteoremet.*

Merknad 1.9.35. Den viktigste delen av beviset for Proposisjon 1.9.30 er ligningen

$$(x+y)^m \cdot (x+y) = \left(\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^{m-i} y^i \right) \cdot (x+y).$$

Det er her vi benytter antakelsen at

$$(x+y)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} a^{m-i} b^i.$$

Merknad 1.9.36. Til å begynne med kan manipulasjoner med summetegn som i beviset for Proposisjon 1.9.30 se litt forvirrende ut. I så fall skriv alle summene uten å bruke summetegnet. Skriv for eksempel

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$$

som

$$\binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \cdots + \binom{n}{n-1} x^1 y^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 y^n.$$

Oppgaver

O1.1 Oppgaver i eksamens stil

Oppgave O1.1.5. Bevis at begge utsagnene nedenfor er gale:

(1) For alle naturlige tall m og n er $(mn)! = m! \cdot n!$.

(2) For alle naturlige tall m og n er $(m+n)! = m! + n!$.

Oppgave O1.1.6. La n være et naturlig tall slik at $n \geq 4$. Bevis at $n! > n^2$. *Tips*: Benytt Proposisjon 1.5.14 i beviset.

Oppgave O1.1.7. La n, k, og l være heltall slik at $n \geq k \geq l \geq 0$. Bevis at

$$\binom{n}{k} \cdot \binom{k}{l} = \binom{n}{l} \cdot \binom{n-l}{k-l}.$$

Tips: Induksjon behøves ikke! På hver side av ligningen, erstatt binomnialkoeffisientene med deres definisjonene, og vis at begge sidene blir like.

Oppgave O1.1.8. La n være et naturlig tall.

(1) Bevis at

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

(2) Deduser at

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \binom{2n+1}{3}.$$

Oppgave O1.1.9. La n være et naturlig tall slik at $n \geq 2$. Bevis at

$$\sum_{i=2}^{n} \binom{i}{2} = \binom{n+1}{3}.$$

Tips: Benytt Proposisjon 1.9.18 i beviset.

O1.2 Oppgaver for å hjelpe med å forstå forelesningen

Oppgave O1.2.14. Regn ut følgende tall.

(1) 5!

(2) 6!

Oppgave O1.2.15. Regn ut $\binom{7}{k}$ for alle heltallene k slik at $0 \leq k \leq 7$, uten å benytte Proposisjon 1.9.18.

Oppgave O1.2.16. Regn ut $\binom{7}{k}$ for alle heltallene k slik at $0 \leq k \leq 7$, uten å benytte Proposisjon 1.9.18.

Oppgave O1.2.17. Regn ut $\binom{8}{k}$ for alle heltall k slik at $0 \leq k \leq 7$, ved å benytte Proposisjon 1.9.18 og til Oppgave O1.2.16.

Oppgave O1.2.18. Gjør det samme som i Merknad 1.4.11 for Proposisjon 1.9.29. Med andre ord, beskriv hvordan algoritmen i Merknad 1.4.3 ser ut for Proposisjon 1.9.29.

Oppgave O1.2.19. Hva fastslår Proposisjon 1.9.30 når $n = 5$?

Oppgave O1.2.20. Skriv utsagnet i Proposisjon 1.9.30 når $n = 4$ uten å bruke summetegnet. Skriv så beviset for dette utsagnet uten å bruke summetegnet, ved å ertsatte m med 3 i beviset for Proposisjon 1.9.30. *Tips*: Se Merknad 1.9.36.

Oppgave O1.2.21. La n være et naturlig tall. Ved å la x være 1 og y være 1 i Proposisjon 1.9.30, bevis at

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Oppgave O1.2.22. La n være et naturlig tall. Følgende ligning kan også deduseres fra Proposisjon 1.9.30:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

Hvilke heltall bør vi la x og y være?