Forelesning 5 — mandag den 1. september

1.11 Fibonnacitall — forts.

Proposisjon 1.11.6. La n være et naturlig tall. Da er

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_{n+2} - 1.$$

Bevis. Først sjekker vi om proposisjonen er sann når $n = 1$. I dette tilfellet er utsagnet at

$$u_1 = u_{1+2} - 1.$$

Siden $u_1 = 1$ og

$$u_{1+2} - 1 = u_3 - 1 = 2 - 1 = 1,$$

er dette sant.

Anta nå at proposisjonen har blitt bevist når n er et gitt naturlig tall m. Således har det blitt bevist at

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_m = u_{m+2} - 1.$$

Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Fra antakelsen at

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_m = u_{m+2} - 1,$$

følger det at

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \cdots + u_m + u_{m+1} &= (u_{m+2} - 1) + u_{m+1} \\ &= u_{m+2} + u_{m+1} - 1. \end{aligned}$$

(2) Ut ifra definisjonen til sekvensen av Fibonaccitall er

$$u_{m+3} = u_{m+2} + u_{m+1}.$$

Fra (1) – (2) deduserer vi at

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_m + u_{m+1} = u_{m+3} - 1.$$

Dermed er proposisjonen sann når n er det naturlige tallet $m + 1$.

Ved induksjon konkluderer vi at proposisjonen er sann når n er et hvilket som helst naturlig tall.

□

Eksempel 1.11.7. Når $n = 2$, fastslår Proposisjon 1.11.6 at

$$u_1 + u_2 = u_4 - 1,$$

altså at

$$1 + 1 = 3 - 1.$$

Eksempel 1.11.8. Når $n = 3$, fastslår Proposisjon 1.11.6 at

$$u_1 + u_2 + u_3 = u_5 - 1,$$

altså at

$$1 + 1 + 2 = 5 - 1.$$

Eksempel 1.11.9. Når $n = 4$, fastslår Proposisjon 1.11.6 at

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = u_6 - 1,$$

altså at

$$1 + 1 + 2 + 3 = 8 - 1.$$

Eksempel 1.11.10. Når $n = 9$, fastslår Proposisjon 1.11.6 at

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_9 = u_{11} - 1,$$

altså at

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 = 89 - 1.$$

Merknad 1.11.11. Den viktigste delen av dette beviset er ligningen

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_m + u_{m+1} = (u_{m+2} - 1) + u_{m+1}.$$

Det er her vi benytter antakelsen at

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_m = u_{m+2} - 1.$$

Proposisjon 1.11.12. La n være et naturlig tall slik at $n \geq 2$. Da er

$$u_n^2 = u_{n+1}u_{n-1} + (-1)^{n-1}.$$

Bevis. Først sjekker vi om proposisjonen er sann når $n = 2$. I dette tilfellet er utsagnet at

$$u_2^2 = u_{2+1}u_{2-1} + (-1)^{2-1}.$$

Siden

$$u_2^2 = 1^2 = 1$$

og

$$\begin{aligned} u_{2+1}u_{2-1} + (-1)^{2-1} &= u_3 u_1 - 1 \\ &= 2 \cdot 1 - 1 \\ &= 2 - 1 \\ &= 1, \end{aligned}$$

er dette sant.

Anta nå at proposisjonen har blitt bevist når n et gitt naturlig tall m slik at $m \geq 2$. Således har det blitt bevist at

$$u_m^2 = u_{m+1}u_{m-1} + (-1)^{m-1}.$$

Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Ut ifra definisjonen til sekvensen av Fibonaccitall er

$$u_{m+1} = u_m + u_{m-1}.$$

Derfor er

$$\begin{aligned} u_{m+1}^2 - u_{m+2}u_m &= u_{m+1}\left(u_m + u_{m-1}\right) - u_{m+2}u_m \\ &= u_{m+1}u_m + u_{m+1}u_{m-1} - u_{m+2}u_m \\ &= u_m\left(u_{m+1} - u_{m+2}\right) + u_{m+1}u_{m-1}. \end{aligned}$$

(2) Ut ifra definisjonen til sekvensen av Fibonaccitall er

$$u_{m+2} = u_{m+1} + u_m.$$

Derfor er

$$u_{m+1} - u_{m+2} = -u_m.$$

Vi deduserer at

$$u_m\left(u_{m+1} - u_{m+2}\right) + u_{m+1}u_{m-1} = -u_m^2 + u_{m+1}u_{m-1}.$$

(3) Fra antakelsen at

$$u_m^2 = u_{m+1}u_{m-1} + (-1)^{m-1},$$

følger det at

$$\begin{aligned} -u_m^2 + u_{m+1}u_{m-1} &= -(-1)^{m-1} \\ &= (-1) \cdot (-1)^{m-1} \\ &= (-1)^{m-1+1} \\ &= (-1)^m. \end{aligned}$$

Fra (1) – (3) deduserer vi at

$$u_{m+1}^2 - u_{m+2}u_m = (-1)^m.$$

Derfor er

$$u_{m+1}^2 = u_{m+2}u_m + (-1)^m.$$

Dermed er proposisjonen sann når n er det naturlige tallet $m+1$.

Ved induksjon konkluderer vi at proposisjonen er sann når n er et hvilket som helst naturlig tall slik at $n \geq 2$.

□

Eksempel 1.11.13. Når $n = 3$, fastslår Proposisjon 1.11.12 at

$$2^2 = 3 \cdot 1 + 1.$$

Eksempel 1.11.14. Når $n = 4$, fastslår Proposisjon 1.11.12 at

$$3^2 = 5 \cdot 2 - 1.$$

Eksempel 1.11.15. Når $n = 9$, fastslår Proposisjon 1.11.12 at

$$34^2 = 55 \cdot 21 + 1.$$

Merknad 1.11.16. Den viktigste delen av beviset for Proposisjon 1.11.12 er Steg (3). Det er her vi benytter antakelsen at

$$u_m^2 = u_{m+1}u_{m-1} + (-1)^{m-1}.$$

1.12 Binets formel for Fibonaccitallene

Merknad 1.12.1. Nå skal vi finne en formel for det n-te Fibonaccitallet.

Proposisjon 1.12.2. La x være en løsning til ligningen

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

La n være et naturlig tall slik at $n \geq 2$. Da er

$$x^n = xu_n + u_{n-1}.$$

Bevis. Først sjekker vi om proposisjonen er sann når $n = 2$. I dette tilfellet er utsagnet at

$$x^2 = xu_2 + u_1.$$

Siden $u_1 = 1$ og $u_2 = 1$, er

$$xu_2 + u_1 = x \cdot 1 + 1 = x + 1.$$

Ut ifra antakelsen at

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

er

$$x^2 = x + 1.$$

Dermed er utsagnet sant.

Anta nå at proposisjonen har blitt bevist for et gitt heltall m slik at $m \geq 2$. Således har det blitt bevist at

$$x^m = xu_m + u_{m-1}.$$

Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Fra antakelsen at

$$x^m = xu_m + u_{m-1}$$

følger det, ved å gange begge sidene i denne ligningen med x, at

$$x^{m+1} = x^2 u_m + xu_{m-1}.$$

(2) Siden x er en løsning til ligningen

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

er

$$x^2 = x + 1.$$

Fra (1) – (2) deduserer vi at

$$x^{m+1} = (x + 1)u_m + xu_{m-1}.$$

Nå gjør vi følgende observajoner.

(1) Vi har:

$$\begin{aligned}(x + 1)u_m + xu_{m-1} &= xu_m + u_m + xu_{m-1} \\ &= xu_m + xu_{m-1} + u_m \\ &= x(u_m + u_{m-1}) + u_m.\end{aligned}$$

(2) Ut ifra definisjonen til sekvensen av Fibonaccitall er

$$u_{m+1} = u_m + u_{m-1}.$$

Fra (1) – (2) deduserer vi at

$$(x + 1)u_m + xu_{m-1} = xu_{m+1} + u_m.$$

For å oppsummere beviset så langt, har vi fastslått at

$$x^{m+1} = (x+1)u_m + xu_{m-1}$$

og at

$$(x+1)u_m + xu_{m-1} = xu_{m+1} + u_m.$$

Vi deduserer at

$$x^{m+1} = xu_{m+1} + u_m.$$

Dermed er proposisjonen sann når $n = m + 1$.

Ved induksjon konkluderer vi at proposisjonen er sann for alle naturlige tall n slik at $n \geq 2$.

□

Eksempel 1.12.3. La x være en løsning til ligningen

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Når $n = 3$, fastslår Proposisjon 1.12.2 at

$$\begin{aligned} x^3 &= u_3 x + u_2 \\ &= 2x + 1. \end{aligned}$$

Eksempel 1.12.4. La x være en løsning til ligningen

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Når $n = 5$, fastslår Proposisjon 1.12.2 at

$$\begin{aligned} x^5 &= u_5 x + u_5 \\ &= 5x + 3 \end{aligned}$$

Eksempel 1.12.5. La x være en løsning til ligningen

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Når $n = 7$, fastslår Proposisjon 1.12.2 at

$$\begin{aligned} x^7 &= u_7 x + u_6 \\ &= 13x + 8 \end{aligned}$$

Eksempel 1.12.6. La x være en løsning til ligningen

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Når $n = 9$, fastslår Proposisjon 1.12.2 at

$$\begin{aligned} x^9 &= u_9 x + u_8 \\ &= 34x + 21. \end{aligned}$$

Lemma 1.12.7. Tallene $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ og $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ er løsninger til ligningen

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Bevis. For å bevise at $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ er en løsning til ligningen

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

regner vi som følger:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 &= \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)\cdot\left(1+\sqrt{5}\right)}{4} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 \\
&= \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 \\
&= \frac{1+2\sqrt{5}+5-2-2\sqrt{5}-4}{4} \\
&= \frac{0}{4} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

For å bevise at $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ er en løsning til ligningen

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

regner vi som følger:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} - 1 &= \frac{\left(1-\sqrt{5}\right)\cdot\left(1-\sqrt{5}\right)}{4} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} - 1 \\
&= \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} - 1 \\
&= \frac{1-2\sqrt{5}+5-2+2\sqrt{5}-4}{4} \\
&= \frac{0}{4} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Merknad 1.12.8. Tallet $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ kalles noen ganger det gyldne snitt.

Proposisjon 1.12.9. La n være et naturlig tall. Da er

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Bevis. Fra Proposisjon 1.12.2 og Lemma 1.12.7 følger det at

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot u_n + u_{n-1},$$

og at

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cdot u_n + u_{n-1}.$$

Ved å benytte oss av disse faktaene, regner vi som følger:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot u_n + u_{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cdot u_n - u_{n-1} \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot u_n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cdot u_n \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cdot u_n \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot u_n \\
&= \frac{2\sqrt{5}}{2} \cdot u_n \\
&= \sqrt{5} \cdot u_n.
\end{aligned}$$

Dermed har vi bevist at

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \sqrt{5} \cdot u_n.$$

Ved å dele begger sidene i denne ligningen med $\sqrt{5}$, deduserer vi at proposisjonen er sann.

□

Eksempel 1.12.10. Når $n = 2$, fastslår Proposisjon 1.12.9 at

$$1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \right).$$

Eksempel 1.12.11. Når $n = 3$, fastslår Proposisjon 1.12.9 at

$$2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3 \right).$$

Eksempel 1.12.12. Når $n = 6$, fastslår Proposisjon 1.12.9 at

$$8 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^6 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^6\right).$$

Eksempel 1.12.13. Når $n = 9$, fastslår Proposisjon 1.12.9 at

$$34 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^9 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^9\right).$$

Terminologi 1.12.14. Ligningen i Proposisjon 1.12.9 kalles *Binets formel*.

Merknad 1.12.15. Flere fakta kan deduseres fra Proposisjon 1.12.9. Etter noen forberedelser skal se på et eksempel: Proposisjon 1.12.18.

Lemma 1.12.16. Vi har:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = -1.$$

Bevis. Vi regner som følger:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) &= \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)}{4} \\
&= \frac{1+\sqrt{5}-\sqrt{5}-5}{4} \\
&= \frac{-4}{4} \\
&= -1.
\end{aligned}$$

□

Lemma 1.12.17. Vi har:

$$\frac{1}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Bevis. Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Ut ifra Eksempel 1.12.10 er

$$1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right).$$

Ved å gange begge sidene av denne ligningen med $\frac{1}{\sqrt{5}}$, følger det at

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right).$$

(2) Vi har:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right) \\
&= \frac{1}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right)
\end{aligned}$$

Fra (1) – (2) deduserer vi at

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right).$$

□

Proposisjon 1.12.18. La n være et naturlig tall. Da er

$$u_{n+2}^2 - u_n^2 = u_{2n+2}.$$

Bevis. For å gjøre beviset lettere å lese, la x være $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, og la y være $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Vi gjør følgende observasjoner.

(1) La m være et naturlig tall. Ut ifra Proposisjon 1.12.9 er

$$u_m = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(x^m - y^m \right).$$

Derfor er

$$\begin{aligned}
u_m^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \left(x^m - y^m \right) \right)^2 \\
&= \frac{1}{5} \left(x^m - y^m \right) \left(x^m - y^m \right) \\
&= \frac{1}{5} \left(x^{2m} - 2x^m y^m + y^{2m} \right) \\
&= \frac{1}{5} \left(x^{2m} - 2(xy)^m + y^{2m} \right).
\end{aligned}$$

(2) Ut ifra Lemma 1.12.16 er

$$2 \cdot (xy)^m = 2 \cdot (-1)^m.$$

Fra (1) – (2) deduserer vi at

$$u_m^2 = \frac{1}{5}\left(x^{2m} - 2 \cdot (-1)^m + y^{2m}\right).$$

Dermed er

$$u_n^2 = \frac{1}{5}\left(x^{2n} - 2 \cdot (-1)^n + y^{2n}\right)$$

og er

$$u_{n+2}^2 = \frac{1}{5}\left(x^{2(n+2)} - 2 \cdot (-1)^{n+2} + y^{2(n+2)}\right).$$

Vi deduserer at

$$\begin{aligned}
&u_{n+2}^2 - u_n^2 \\
&= \frac{1}{5}\left(x^{2(n+2)} - 2 \cdot (-1)^{n+2} + y^{2(n+2)}\right) - \frac{1}{5}\left(x^{2n} - 2 \cdot (-1)^n + y^{2n}\right) \\
&= \frac{1}{5}\left(x^{2(n+2)} - 2 \cdot (-1)^n \cdot (-1)^2 + y^{2(n+2)} - x^{2n} + 2 \cdot (-1)^n - y^{2n}\right) \\
&= \frac{1}{5}\left(x^{2(n+2)} + y^{2(n+2)} - x^{2n} - y^{2n} - 2 \cdot (-1)^n + 2 \cdot (-1)^n\right) \\
&= \frac{1}{5}\left(x^{2(n+2)} + y^{2(n+2)} - x^{2n} - y^{2n}\right)
\end{aligned}$$

Dermed er

$$u_{n+2}^2 - u_n^2 = \frac{1}{5}\left(x^{2(n+2)} + y^{2(n+2)} - x^{2n} - y^{2n}\right).$$

Nå gjør vi følgende observasjoner.

(1) Ut ifra Lemma 1.12.16 er

$$x^2y^2 = (xy)^2 = (-1)^2 = 1.$$

Derfor er

$$\begin{aligned}
\frac{1}{5}\left(x^{2(n+2)} + y^{2(n+2)} - x^{2n} - y^{2n}\right) &= \frac{1}{5}\left(x^{2(n+2)} + y^{2(n+2)} - x^2y^2x^{2n} - x^2y^2y^{2n}\right) \\
&= \frac{1}{5}\left(x^{2n+4} + y^{2n+4} - y^2x^{2n+2} - x^2y^{2n+2}\right) \\
&= \frac{1}{5}\left(x^2 - y^2\right)\left(x^{2n+2} - y^{2n+2}\right)
\end{aligned}$$

(2) Ut ifra Lemma 1.12.17 er

$$\frac{1}{5}\left(x^2 - y^2\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Derfor er

$$\frac{1}{5}\left(x^2 - y^2\right)\left(x^{2n+2} - y^{2n+2}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x^{2n+2} - y^{2n+2}\right).$$

(3) Ut ifra Proposisjon 1.12.9 er

$$u_{2n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x^{2n+2} - y^{2n+2}\right).$$

Vi deduserer fra (1) – (3) at

$$\frac{1}{5}\left(x^{2(n+2)} + y^{2(n+2)} - x^{2n} - y^{2n}\right) = x_{2n+2}.$$

For å oppsummere beviset så langt, har vi fastslått at

$$u_{n+2}^2 - u_n^2 = \frac{1}{5}\left(x^{2(n+2)} + y^{2(n+2)} - x^{2n} - y^{2n}\right)$$

og at

$$\frac{1}{5}\left(x^{2(n+2)} + y^{2(n+2)} - x^{2n} - y^{2n}\right) = x_{2n+2}.$$

Vi deduserer at

$$u_{n+2}^2 - u_n^2 = u_{2n+2}.$$

□

Eksempel 1.12.19. Når $n = 2$, fastslår Proposisjon 1.12.18 at

$$3^2 - 1^2 = 8.$$

Eksempel 1.12.20. Når $n = 3$, fastslår Proposisjon 1.12.18 at

$$5^2 - 2^2 = 21.$$

Eksempel 1.12.21. Når $n = 5$, fastslår Proposisjon 1.12.18 at

$$13^2 - 5^2 = 144.$$

Oppgaver

O1.1 Oppgaver i eksamens stil

Oppgave O1.1.10. La n være et naturlig tall. La u_{n+1} være det $(n+1)$-te Fibonaccitallet. Bevis at

$$u_1 + u_3 + \ldots + u_{2n-1} = u_{2n}.$$

Oppgave O1.1.11. La n være et naturlig tall. La u_k være det k-te Fibonnacitallet, hvor k er et hvilket som helst naturlig tall. Bevis at

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} u_i = u_{2n}.$$

Tips: Gjør følgende:

(1) La r være

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

og la s være

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Bevis at

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(r^n - s^n\right) = \frac{r^n - s^n}{r-s}.$$

Fra Proposisjon 1.12.9, deduser at

$$u_n = \frac{r^n - s^n}{r-s}.$$

(2) Bevis at

$$(1+r)^n - (1+s)^n = \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} r^i\right) - \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} s^i\right).$$

Tips: Benytt formelen i Proposisjon 1.9.30 to ganger:

(i) Ved å la x være 1 og å la y være r.

(ii) Ved å la x være 1 og å la y være s.

(3) Deduser fra (1), (2) og Proposisjon 1.12.9 at

$$\frac{(1+r)^n - (1+s)^n}{r-s} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} u_i.$$

(4) Fra Lemma 1.12.7 vet vi at $r^2 = r + 1$ og at $s^2 = s + 1$. Deduser at

$$r^{2n} - s^{2n} = (1+r)^n - (1+s)^n.$$

(5) Deduser fra (1) og (4) at

$$u_{2n} = \frac{(1+r)^n - (1+s)^n}{r-s}.$$

(6) Konkluder fra (3) og (5) at

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} u_i = u_{2n}.$$

Oppgave O1.1.12. Følgende definerer ved rekursjon *sekvensen av Lucastall.*

(1) Det første heltallet i sekvensen er 1.

(2) Det andre heltallet i sekvensen er 3.

(3) La m være et naturlig tall slik at $m \geq 2$. Anta at det i-te heltallet i sekvensen har blitt definert for alle de naturlige tallene i slik at $2 \leq i \leq m$. Betegn det m-te heltallet i sekvensen som v_m, og betegn det $(m-1)$-te heltallet i sekvensen som v_{m-1}. Da definerer vi det $(m+1)$-te heltallet i sekvensen til å være $v_{m-1} + v_m$.

Skriv de første ti heltallene i sekvensen.

Oppgave O1.1.13. La v_n betegne det n-te heltallet i sekvensen av Lucastall. Bevis at

$$v_1 + \ldots + v_n = v_{n+2} - 3.$$

O1.2 Oppgaver for å hjelpe med å forstå forelesningen

Oppgave O1.2.24. Hva fastslår Proposisjon 1.11.6 når $n = 5$?

Oppgave O1.2.25. Gjør det samme som i Merknad 1.4.11 for Proposisjon 1.11.6. Med andre ord, beskriv hvordan algoritmen i Bemarking 1.4.3 ser ut for Proposisjon 1.11.6.

Oppgave O1.2.26. Hva fastslår Proposisjon 1.11.12 når $n = 5$?

Oppgave O1.2.27. Gjør det samme som i Merknad 1.4.11 for Proposisjon 1.11.12. Med andre ord, beskriv hvordan algoritmen i Bemarking 1.4.3 ser ut for Proposisjon 1.11.12.

Oppgave O1.2.28. Hva fastslår Proposisjon 1.12.2 når $n = 6$?

Oppgave O1.2.29. Gjør det samme som i Merknad 1.4.11 for Proposisjon 1.12.2. Med andre ord, beskriv hvordan algoritmen i Bemarking 1.4.3 ser ut for Proposisjon 1.12.2.

Oppgave O1.2.30. Hva fastslår Proposisjon 1.12.9 når $n = 7$?

Oppgave O1.2.31. Hva fastslår Proposisjon 1.12.18 når $n = 7$?