Forelesning 6 — torsdag den 4. september

1.13 Varianter av induksjon

Merknad 1.13.1. Det finnes mange varianter av induksjon. Noen av disse kalles noen ganger «sterk induksjon», men vi skal ikke benytte denne terminologien. Nå skal vi se på de viktigste variantene for oss.

Terminologi 1.13.2. La c være et heltall slik at $c \geq 0$. Anta at vi har et gitt matematisk utsagn for hvert heltall større enn eller likt et gitt heltall r. Anta dessuten at vi ønsker å bevise utsagnet for hvert av disse heltallene. *Induksjon* sier at vi kan gjøre det på følgende måte:

(1) Sjekk om utsagnet er sant for alle heltallene r, $r+1$, $\ldots$, $r+c$.

(2) Hvis det antas at utsagnet har blitt bevist for alle heltallene m, $m-1$, $\ldots$, $m-c$, hvor m er et gitt heltall som er større enn eller likt $r+c$, bevis at utsagnet er sant for heltallet $m+1$.

Merknad 1.13.3. Induksjon som beskrevet i Terminologi 1.4.2 er det samme som induksjon som beskrevet i Terminologi 1.13.2 for $c = 0$.

Merknad 1.13.4. Idéen bak induksjon som beskrevet i Terminologi 1.13.2 er at Steg (1) og Steg (2) gir oss følgende algoritmen for å konstruere et bevis for utsagnet for et hvilket som helst heltall m større enn r:

(i) Steg (1) i Terminologi 1.13.2 fastslår at vi kan bevise utsagnet for alle heltallene m slik at $r \leq m \leq r+c$;

(ii) Steg (2) i Terminologi 1.13.2 fastslår at vi da kan bevise utsagnet når $m = r+c+1$;

(iii) Steg (2) i Terminologi 1.13.2 fastslår at vi *da* kan bevise utsagnet når $m = r+c+2$;

(iv) Steg (2) i Terminologi 1.13.2 fastslår at vi *da* kan bevise utsagnet når $m = r+c+3$;

(v) Slik fortsetter til vi når heltallet vi er interessert i.

Merknad 1.13.5. Algoritmen i Merknad 1.4.3 er det samme som algoritmen i Merknad 1.13.4 for $c = 0$.

Proposisjon 1.13.6. La x være et heltall, og la n være et naturlig tall. Da er

$$x^n - 1 = (x-1) \cdot \left(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1\right).$$

Bevis. Først sjekker vi om proposisjonen er sann når $n = 1$ og når $n = 2$.

(1) Når $n = 1$ er utsagnet at
$$x^1 - 1 = (x-1) \cdot 1.$$
Dette er sant.

(2) Når $n = 2$ er utsagnet at
$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1).$$
Siden
$$(x+1)(x-1) = x^2 + x - x - 1 = x^2 - 1,$$
er dette sant.

Anta nå at proposisjonen har blitt bevist når $n = m$ og når $n = m - 1$, hvor m er et naturlig tall slik at $m \geq 2$. Således har det blitt bevist at
$$x^m - 1 = (x-1) \cdot \left(x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1\right)$$
og at
$$x^{m-1} - 1 = (x-1) \cdot \left(x^{(m-1)-1} + x^{(m-1)-2} + \cdots + x + 1\right).$$
Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Vi har:
$$\begin{aligned}(x+1)\left(x^m - 1\right) - x\left(x^{m-1} - 1\right) &= x^{m+1} - x + x^m - 1 - x^m + x \\ &= x^{m+1} - 1.\end{aligned}$$

(2) Fra antakelsen at
$$\begin{aligned}x^m - 1 &= (x-1) \cdot \left(x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1\right) \\ &= (x-1) \cdot \left(\sum_{i=0}^{m-1} x^i\right),\end{aligned}$$
og antakelsen at
$$\begin{aligned}x^{m-1} - 1 &= (x-1) \cdot \left(x^{(m-1)-1} + x^{(m-1)-2} + \cdots + x + 1\right) \\ &= (x-1) \cdot \left(x^{m-2} + x^{m-3} + \cdots + x + 1\right) \\ &= (x-1) \cdot \left(\sum_{i=0}^{m-2} x^i\right),\end{aligned}$$

følger det at

$$
\begin{aligned}
&(x+1)\left(x^m-1\right) - x\left(x^{m-1}-1\right) \\
&= (x+1)(x-1)\left(\sum_{i=0}^{m-1} x^i\right) - x(x-1)\left(\sum_{i=0}^{m-2} x^i\right) \\
&= (x-1)\left((x+1)\left(\sum_{i=0}^{m-1} x^i\right) - x\left(\sum_{i=0}^{m-2} x^i\right)\right) \\
&= (x-1)\left(x\left(\sum_{i=0}^{m-1} x^i\right) + \left(\sum_{i=0}^{m-1} x^i\right) - x\left(\sum_{i=0}^{m-2} x^i\right)\right) \\
&= (x-1)\left(\left(\sum_{i=1}^{m} x^i\right) + \left(\sum_{i=0}^{m-1} x^i\right) - \left(\sum_{i=1}^{m-1} x^i\right)\right) \\
&= (x-1)\left(\left(\sum_{i=1}^{m} x^i\right) + 1 + \left(\sum_{i=1}^{m-1} x^i\right) - \left(\sum_{i=1}^{m-1} x^i\right)\right) \\
&= (x-1)\left(\left(\sum_{i=1}^{m} x^i\right) + 1\right) \\
&= (x-1)\left(x^m + x^{m-1} + \cdots + x + 1\right)
\end{aligned}
$$

Fra (1) – (2) deduserer vi at

$$x^{m+1} - 1 = (x-1)\left(x^m + x^{m-1} + \cdots + x^2 + x + 1\right).$$

Dermed er proposisjonen sann når n er det naturlige tallet $m+1$.

Ved induksjon konkluderer vi at proposisjonen er sann når n er et hvilket som helst naturlig tall slik at $n \geq 2$. □

Eksempel 1.13.7. La x være et heltall. Når $n = 3$, fastslår Proposisjon 1.13.6 at

$$x^3 - 1 = (x-1)\left(x^2 + x + 1\right).$$

Når for eksempel $x = 5$, fastslår den at

$$124 = 4 \cdot (25 + 5 + 1).$$

Eksempel 1.13.8. La x være et heltall. Når $n = 5$, fastslår Proposisjon 1.13.6 at

$$x^5 - 1 = (x-1)\left(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\right).$$

Når for eksempel $x = -3$, fastslår den at

$$-244 = -4 \cdot (81 - 27 + 9 - 3 + 1).$$

Merknad 1.13.9. Det er lett å bevise Proposisjon 1.13.6 uten å benytte induksjon. Vi kan regne som følger:

$$\begin{aligned}
&(x-1)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1\right)\\
&=x\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1\right)-\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1\right)\\
&=\left(x^{n}+x^{n-1}+\cdots+x^{2}+x\right)-\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1\right)\\
&=x^{n}-1.
\end{aligned}$$

Dette er et helt gyldig bevis! Vi benyttet lignende algebraiske manipulasjoner i beviset vi ga for 1.13.6.

Poenget med beviset vi ga for Proposisjon 1.13.6 er å forklare hvordan en gjennomfører et bevis som benytter varianten av induksjon hvor $c = 1$ og $r = 1$ i Terminologi 1.13.2.

Merknad 1.13.10. Den viktigste delen av beviset for Proposisjon 1.13.6 er ligningen

$$(x+1)\left(x^{m}-1\right)-x\left(x^{m-1}-1\right)=(x+1)(x-1)\left(\sum_{i=0}^{m-1}x^{i}\right)-x(x-1)\left(\sum_{i=0}^{m-2}x^{i}\right).$$

Det er her vi benytter både antakelsen at

$$x^{m}-1=(x-1)\cdot\left(\sum_{i=0}^{m-1}x^{i}\right)$$

og antakelsen at

$$x^{m-1}-1=(x-1)\cdot\left(\sum_{i=0}^{m-2}x^{i}\right).$$

Merknad 1.13.11. Kanskje ser det ut som Observasjon (1) i beviset for Proposisjon 1.13.6 har blitt tatt ut av løse luften. Det er sant at vi må være litt kreativ for å finne ligningen i denne observasjonen, og å skjønne at den har noe å si.

Vi kan se på ligningen i Observasjon (1) på følgende måte. Vi ønsker å bevise proposisjonen når $n = m + 1$. Da må vi jobbe med uttrykket $x^{m+1} - 1$. I tillegg har vi antatt at proposisjonen er sann når $n = m$ og $n = m - 1$, altså at

$$x^{m}-1=(x-1)\cdot\left(\sum_{i=0}^{m-1}x^{i}\right)$$

og at

$$x^{m-1}-1=(x-1)\cdot\left(\sum_{i=0}^{m-2}x^{i}\right).$$

Hvis vi finner en ligning med x^{m+1} på en side, og hvor både $x^m - 1$ og $x^{m-1} - 1$ dukker opp på den andre siden, kan vi benytte begge antakelsene for å si noe om x^{m+1}. Det er ingen generell oppskrift for å finne en slik ligning, men i Observasjon (1) klarte vi det.

Merknad 1.13.12. Hvis manipulasjonene med summetegn i beviset for Proposisjon 1.13.6 ser litt forvirrende ut, følg rådet gitt i Merknad 1.13.12. Skriv for eksempel

$$\sum_{i=1}^{m} x^i$$

som

$$x^m + x^{m-1} + \cdots + x^2 + x,$$

og skriv

$$\sum_{i=0}^{m-1} x^i$$

som

$$x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1.$$

Merknad 1.13.13. La oss se hvordan algoritmen i Merknad 1.13.4 ser ut for Proposisjon 1.13.6. Vi benytter varianten av induksjon hvor $c = 1$ og $r = 1$.

Vi begynner med å sjekke om proposisjonen er sann for alle de naturlige tallene r, $r+1$, ..., $r+c$, det vil si når $n = 1$ og når $n = 2$. Vi sjekker altså at

$$x^1 - 1 = x - 1$$

og at

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1).$$

Så argumenterer vi som i beviset for Proposisjon 1.13.6, ved å erstatte m med 2. Vi gjør altså følgende observasjoner.

(1) Vi har:

$$\begin{aligned}(x+1)\left(x^2-1\right) - x\left(x^{2-1}-1\right) &= x^3 - x + x^2 - 1 - x^2 + x \\ &= x^3 - 1\end{aligned}$$

(2) Vi vet at

$$x^2 - 1 = (x-1) \cdot (x+1)$$

og at

$$x^1 - 1 = (x-1) \cdot 1 = x - 1.$$

Det følger at

$$
\begin{aligned}
&(x+1)\left(x^2-1\right)-x\left(x^{2-1}-1\right)\\
&=(x+1)(x-1)(x+1)-x(x-1)\\
&=(x-1)\left((x+1)(x+1)-x\right)\\
&=(x-1)\left(x(x+1)+(x+1)-x\right)\\
&=(x-1)\left(x^2+x+(x+1)-x\right)\\
&=(x-1)\left((x^2+x)+1+x-x\right)\\
&=(x-1)\left((x^2+x)+1\right)\\
&=(x-1)\left(x^2+x^1+1\right)
\end{aligned}
$$

Fra (1) – (2) deduserer vi at

$$x^3-1=(x-1)\left(x^2+x+1\right).$$

Dermed er proposisjonen sann når $n=3$.

Så argumenterer vi som i beviset for Proposisjon 1.13.6, ved å erstatte m med 3. Vi gjør altså følgende observasjoner.

(1) Vi har:

$$
\begin{aligned}
(x+1)\left(x^3-1\right)-x\left(x^{3-1}-1\right)&=x^4-x+x^3-1-x^3+x\\
&=x^4-1.
\end{aligned}
$$

(2) Vi vet at

$$x^3-1=(x-1)\cdot(x^2+x+1)$$

og at

$$x^2-1=(x-1)\cdot(x+1).$$

Det følger at

$$
\begin{aligned}
&(x+1)\left(x^3-1\right)-x\left(x^{3-1}-1\right)\\
&=(x+1)(x-1)(x^2+x+1)-x(x-1)(x+1)\\
&=(x-1)\left((x+1)(x^2+x+1)-x(x+1)\right)\\
&=(x-1)\left(x(x^2+x+1)+(x^2+x+1)-x(x+1)\right)\\
&=(x-1)\left((x^3+x^2+x)+(x^2+x+1)-(x^2+x)\right)\\
&=(x-1)\left((x^3+x^2+x)+1+(x^2+x)-(x^2+x)\right)\\
&=(x-1)\left((x^3+x^2+x)+1\right)\\
&=(x-1)\left(x^3+x^2+x^1+1\right)
\end{aligned}
$$

Fra (1) – (2) deduserer vi at

$$x^4-1=(x-1)\left(x^3+x^2+x+1\right).$$

Dermed er proposisjonen sann når $n=4$.

Slik fortsetter vi til vi når heltallet vi er interessert i.

1.14 Litt mer om Fibonaccitallene

Proposisjon 1.14.1. La n være et heltall slik at $n \geq 0$, og la k være et naturlig tall slik at $k \geq 3$. Da er

$$u_{n+k} = u_{k-1} \cdot u_{n+2} + u_{k-2} \cdot u_{n+1}.$$

Bevis. Først sjekker vi om proposisjonen er sann når $k = 3$ og når $k = 4$.

(1) Når $k = 3$, er utsagnet at

$$u_{n+3} = u_2 \cdot u_{n+2} + u_1 \cdot u_{n+1}.$$

Vi gjør følgende observasjoner.

(i) Siden $u_1 = 1$ og $u_1 = 1$, er

$$u_2 \cdot u_{n+2} + u_1 \cdot u_{n+1} = u_{n+2} + u_{n+1}.$$

(ii) Ut ifra definisjonen til sekvensen av Fibonaccitall er

$$u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1}.$$

Fra (i) – (ii) deduserer vi at utsagnet er sant.

(2) Når $k = 4$, er utsagnet at

$$u_{n+4} = u_3 \cdot u_{n+2} + u_2 \cdot u_{n+1}.$$

Vi gjør følgende obsvervasjoner.

(i) Siden $u_2 = 1$ og $u_3 = 2$, er

$$u_3 \cdot u_{n+2} + u_2 \cdot u_{n+1} = 2u_{n+2} + u_{n+1}.$$

(ii) Fra definisjonen til sekvensen av Fibonaccitall har vi:

$$u_{n+4} = u_{n+3} + u_{n+2}$$

og

$$u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1}.$$

Derfor er

$$\begin{aligned} u_{n+4} &= (u_{n+2} + u_{n+1}) + u_{n+2} \\ &= 2u_{n+2} + u_{n+1}. \end{aligned}$$

Fra (i) – (ii) deduserer vi at utsagnet er sant.

Anta nå at proposisjonen har blitt bevist når $k = m$ og når $k = m - 1$, hvor m er et gitt heltall større enn eller likt 4. Således har det blitt bevist at

$$u_{n+m} = u_{m-1} \cdot u_{n+2} + u_{m-2} \cdot u_{n+1}$$

og at

$$u_{n+m-1} = u_{m-2} \cdot u_{n+2} + u_{m-3} \cdot u_{n+1}.$$

Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Ut ifra definisjonen til sekvensen av Fibonaccitall er

$$u_{n+m+1} = u_{n+m} + u_{n+m-1}.$$

(2) Fra antakelsen at

$$u_{n+m} = u_{m-1} \cdot u_{n+2} + u_{m-2} \cdot u_{n+1}$$

og antakelsen at

$$u_{n+m-1} = u_{m-2} \cdot u_{n+2} + u_{m-3} \cdot u_{n+1}$$

følger det at

$$\begin{aligned}
&u_{n+m} + u_{n+m-1} \\
&= (u_{m-1} \cdot u_{n+2} + u_{m-2} \cdot u_{n+1}) + (u_{m-2} \cdot u_{n+2} + u_{m-3} \cdot u_{n+1}) \\
&= (u_{m-1} + u_{m-2})\, u_{n+2} + (u_{m-2} + u_{m-3})\, u_{n+1}
\end{aligned}$$

(3) Ut ifra definisjonen til sekvensen av Fibonaccitall har vi:

$$u_m = u_{m-1} + u_{m-2}$$

og

$$u_{m-1} = u_{m-2} + u_{m-3}.$$

Fra (1) – (3) deduserer vi at

$$u_{n+m+1} = u_m \cdot u_{n+2} + u_{m-1} \cdot u_{n+1}.$$

Dermed er proposisjonen sann når k er det naturlige tallet $m + 1$.

Ved induksjon konkluderer vi at proposisjonen er sann når k er et hvilket som helst naturlig tall større enn eller likt 3.

□

Eksempel 1.14.2. Når $n = 2$ og $k = 3$, fastslår Proposisjon 1.14.1 at

$$u_5 = u_2 u_4 + u_1 u_3,$$

altså at

$$5 = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2.$$

Eksempel 1.14.3. Når $n = 2$ og $k = 4$, fastslår Proposisjon 1.14.1 at

$$u_6 = u_3 u_4 + u_2 u_3,$$

altså at

$$8 = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2.$$

Eksempel 1.14.4. Når $n = 2$ og $k = 7$, fastslår Proposisjon 1.14.1 at

$$u_9 = u_6 u_4 + u_5 u_3,$$

altså at

$$34 = 28 \cdot 3 + 5 \cdot 2.$$

Eksempel 1.14.5. Når $n = 3$ og $k = 3$, fastslår Proposisjon 1.14.1 at

$$u_6 = u_2 u_5 + u_1 u_4,$$

altså at

$$8 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 3.$$

Eksempel 1.14.6. Når $n = 3$ og $k = 4$, fastslår Proposisjon 1.14.1 at

$$u_7 = u_3 u_5 + u_2 u_4,$$

altså at

$$13 = 2 \cdot 5 + 1 \cdot 3.$$

Eksempel 1.14.7. Når $n = 3$ og $k = 7$, fastslår Proposisjon 1.14.1 at

$$u_{10} = u_6 u_5 + u_5 u_4,$$

altså at

$$55 = 8 \cdot 5 + 5 \cdot 3.$$

Eksempel 1.14.8. Når $n = 6$ og $k = 5$, fastslår Proposisjon 1.14.1 at

$$u_{11} = u_4 u_8 + u_3 u_7,$$

altså at

$$89 = 3 \cdot 21 + 2 \cdot 13.$$

Merknad 1.14.9. I beviset for Proposisjon 1.14.1 benyttet vi varianten av induksjon hvor $c = 1$ og $r = 3$. Vi kan se på beviset for følgende måte. Først velger vi et heltall n slik at $n \geq 0$: la for eksempel n være 7. Da blir utsagnet:

$$u_{7+k} = u_{k-1} \cdot u_9 + u_{k-2} \cdot u_8.$$

Så beviser vi at dette er sant, ved å erstatte n med 7 i beviset for Proposisjon 1.14.1.

Vi begynner med å sjekke om utsagnet er sant for alle de naturlige tallene r, $r+1$, $\ldots$, $r+c$, det vil si når $k=3$ og når $k=4$. Vi sjekker altså at

$$u_{10} = u_2 \cdot u_9 + u_1 \cdot u_8$$

og at

$$u_{11} = u_3 u_9 + u_2 u_8.$$

Anta nå at det har blitt bevist at utsagnet er sant når $k=m$ og når $k=m-1$, hvor m er et gitt heltall større enn eller likt 4. Således har det blitt bevist at

$$u_{7+m} = u_{m-1} \cdot u_9 + u_{m-2} \cdot u_8$$

og at

$$u_{7+m-1} = u_{m-2} \cdot u_9 + u_{m-3} \cdot u_8.$$

Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Ut ifra definisjonen til sekvensen av Fibonaccitall er

$$u_{7+m+1} = u_{7+m} + u_{6+m}.$$

(2) Fra antakelsen at

$$u_{7+m} = u_{m-1} \cdot u_9 + u_{m-2} \cdot u_8$$

og antakelsen at

$$u_{6+m} = u_{m-2} \cdot u_9 + u_{m-3} \cdot u_8$$

følger det at

$$\begin{aligned} &u_{7+m} + u_{6+m} \\ &= (u_{m-1} \cdot u_9 + u_{m-2} \cdot u_8) + (u_{m-2} \cdot u_9 + u_{m-3} \cdot u_8) \\ &= (u_{m-1} + u_{m-2})\, u_9 + (u_{m-2} + u_{m-3})\, u_8 \end{aligned}$$

(3) Ut ifra definisjonen til sekvensen av Fibonaccitall har vi:

$$u_m = u_{m-1} + u_{m-2}$$

og

$$u_{m-1} = u_{m-2} + u_{m-3}.$$

Fra (1) – (3) deduserer vi at

$$u_{8+m} = u_m \cdot u_9 + u_{m-1} \cdot u_8.$$

Dermed er proposisjonen sann når k er det naturlige tallet $m+1$.

Ved induksjon konkluderer vi at utsagnet er sant når k er et hvilket som helst naturlig tall større enn eller likt 3.

Merknad 1.14.10. Siden ligningen

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

som definerer det n-te Fibonaccitallene inneholder *to* av Fibonaccitallene som allerede har blitt definert, benytter vi typisk varianten av induksjon hvor $c = 1$ for å bevise påstander om Fibonaccitallene:

(1) For å gjennomføre Steg (1) i Terminologi 1.13.2, sjekker vi om påstanden er sann for *to* heltall.

(2) For å gjennomføre Steg (2) i Terminologi 1.13.2, antar vi at påstanden har blitt bevist for de *to* heltallene m og $m - 1$, hvor m er et gitt heltall.

Rekursjon og induksjon henger generelt sett sammen slik.

Proposisjon 1.14.11. La n være et naturlig tall. Da er $u_{5n+2} > 10^n$.

Bevis. Først sjekker vi om proposisjonen er sann når $n = 1$. I dette tilfellet er utsagnet at $u_7 > 10$. Siden $u_7 = 13$ er dette sant.

Anta nå at proposisjonen har blitt bevist når n er et gitt naturlig tall m. Således har det blitt bevist at $u_{5m+2} > 10^m$. Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Vi har:

$$u_{5(m+1)+2} = u_{5m+5+2} = u_{5m+7}.$$

(2) Ut ifra Proposisjon 1.14.1, ved å la n være $5m$, er

$$u_{5m+7} = u_6 u_{5m+2} + u_5 u_{5m+1}.$$

Siden $u_5 = 5$ og $u_6 = 8$, deduserer vi at

$$u_{5m+7} = 8u_{5m+2} + 5u_{5m+1}.$$

(3) Siden $u_{5m} < u_{5m+1}$, er

$$\begin{aligned} u_{5m} + u_{5m+1} &< u_{5m+1} + u_{5m+1} \\ &= 2u_{5m+1}. \end{aligned}$$

Derfor er

$$\begin{aligned} 2(u_{5m} + u_{5m+1}) &< 2 \cdot 2u_{5m+1} \\ &= 4u_{5m+1}. \end{aligned}$$

(4) Siden u_{5m+1}, som alle Fibonnacitallene, er større enn 0, er

$$4u_{5m+1} < 5u_{5m+1}.$$

(5) Fra (3) – (4), følger det at

$$2(u_{5m} + u_{5m+1}) < 5u_{5m+1}.$$

(6) Ut ifra definisjonen til sekvensen av Fibonaccitall, er

$$u_{5m} + u_{5m+1} = u_{5m+2}.$$

(7) Fra (5) – (6), følger det at

$$2u_{5m+2} < 5u_{5m+1}.$$

Derfor er

$$\begin{aligned} 8u_{5m+2} + 5u_{5m+1} &> 8u_{5m+2} + 2u_{5m+2} \\ &= 10u_{5m+2}. \end{aligned}$$

Fra (1), (2), og (7), følger det at

$$u_{5(m+1)+2} > 10u_{5m+2}.$$

Fra antakelsen at $u_{5m+2} > 10^m$, deduserer vi at

$$\begin{aligned} u_{5(m+1)+2} &> 10 \cdot 10^m \\ &= 10^{m+1}. \end{aligned}$$

Dermed er proposisjonen sann når n er det naturlige tallet $m + 1$.

Ved induksjon konkluderer vi at proposisjonen er sann når n er et hvilket som helst naturlig tall. □

Eksempel 1.14.12. Når $n = 2$, fastslår Proposisjon 1.14.11 at $u_{12} > 10^2 = 100$. Faktisk er $u_{12} = 144$.

Eksempel 1.14.13. Når $n = 3$, fastslår Proposisjon 1.14.11 at $u_{17} > 10^3 = 1000$.

Eksempel 1.14.14. Når $n = 7$, fastslår Proposisjon 1.14.11 at $u_{37} > 10^7 = 10000000$.

Oppgaver

O1.1 Oppgaver i eksamens stil

Oppgave O1.1.15. La u_r betegne det r-te heltallet i sekvensen av Fibonaccitall. La v_r betegne det r-te heltallet i sekvensen av Lucastall.

(1) La n være et naturlig tall slik at $n \geq 3$. Bevis at

$$v_{n+2} + v_n = (v_{n+1} + v_{n-1}) + (v_n + v_{n-2}).$$

Tips: Induksjon behøves ikke!

(2) La n være et naturlig tall slik at $n \geq 2$. Bevis at

$$v_{n+1} + v_{n-1} = 5u_n.$$

Oppgave O1.1.16. La n være et naturlig tall. La u_n være det n-te Fibonaccitallet. Bevis at u_n er lik

$$\binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \cdots + \binom{\frac{n-1}{2}}{\frac{n-1}{2}}$$

dersom n er et oddetall, og er lik

$$\binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \cdots + \binom{\frac{n}{2}}{\frac{n-2}{2}}$$

dersom n er et partall. *Tips*: Benytt en variant av induksjon, og benytt Proposisjon 1.9.18.

O1.2 Oppgaver for å hjelpe med å forstå forelesningen

Oppgave O1.2.32. Gi et alternativt bevis for Proposisjon 1.12.9 ved å benytte varianten av induksjon hvor $c = 1$ i Terminologi 1.13.2.

Oppgave O1.2.33. La v_n være det n-te heltallet i sekvensen av Lucastall. Bevis at

$$v_n = \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Tips: Benytt varianten av induksjon hvor $c = 1$ i Terminologi 1.13.2.

Oppgave O1.2.34. La u_n være det n-te Fibonaccitallet, og la v_n være det n-te heltallet i sekvensen av Lucastall. Bevis at

$$v_n^2 - 5u_n^2 = 4 \cdot (-1)^n,$$

ved å benytte Proposisjon 1.12.9 og Oppgave O1.2.33.

Oppgave O1.2.35. La x være et heltall. Hva fastslår Proposisjon 1.13.6 når $n = 7$? Hva fastslår den når $n = 7$ og $x = -2$?

Oppgave O1.2.36. Fortsett med Merknad 1.13.13 ved å vise at Proposisjon 1.4.5 er sann når $n = 4$.

Oppgave O1.2.37. La x være et heltall. Hva fastslår Proposisjon 1.14.1 når $n = 4$ og $k = 6$? Hva fastslår den når $n = 5$ og $k = 4$?

Oppgave O1.2.38. Skriv utsagnet i Proposisjon 1.14.1 når $n = 9$. Skriv så et bevis for dette utsagnet ved å erstatte k med 9 i beviset for Proposisjon 1.14.1. *Tips*: Se Merknad 1.14.9.

Oppgave O1.2.39. Gjør det samme som i Merknad 1.13.13 for Proposisjon 1.14.1. Med andre ord, beskriv hvordan algoritmen i Bemarking 1.13.4 ser ut for Proposisjon 1.14.1.

Oppgave O1.2.40. La n være et heltall slik at $n \geq 0$, la k være et naturlig tall slik at $k \geq 3$, og la l være et naturlig tall slik at $l \leq k - 2$. Da er

$$u_{n+k} = u_{k-l} \cdot u_{n+l+1} + u_{k-l-1} \cdot u_{n+l}.$$

Tips: Omarbeid beviset for Proposisjon 1.14.1. HUsk å sjekke om proposisjonen er sann når $k = 3$ og når $k = 4$ for alle de naturlige tallene l slik at $l \leq k - 2$. Det er ikke så mange!

Oppgave O1.2.41. Hva fastslår Proposisjon 1.14.11 når $n = 5$?

Oppgave O1.2.42. Gjør det samme som i Merknad 1.4.11 for Proposisjon 1.14.11. Med andre ord, beskriv hvordan algoritmen i Merknad 1.4.3 ser ut for Proposisjon 1.14.11.

Oppgave O1.2.43. Gi et eksempel på et naturlig tall n slik at $u_n > 1000000000000000$. Her er u_n det n-te Fibonaccitallet.