Forelesning 7 — mandag den 8. september

1.1 Absoluttverdien

Definisjon 1.1.1. La n være et heltall. Da er *absoluttverdien til* n:

(1) n dersom $n \geq 0$;

(2) $-n$ dersom $n < 0$.

Merknad 1.1.2. Med andre ord får vi absoluttverdien til n ved å fjerne minustegnet hvis $n < 0$, og ved å gjøre ingenting hvis $n > 0$.

Notasjon 1.1.3. La n være et heltall. Vi betegner absoluttverdien til n som $|n|$.

Eksempel 1.1.4. Vi har: $|3| = 3$.

Eksempel 1.1.5. Vi har: $|-3| = 3$.

Eksempel 1.1.6. Vi har: $|0| = 0$.

Eksempel 1.1.7. Vi har: $|-7| = 7$.

Eksempel 1.1.8. Vi har: $|151| = 151$.

1.2 Divisjonsalgoritmen

Merknad 1.2.1. La l og n være naturlige tall. Fra barneskolen kjenner du til at vi alltid kan finne et naturlig tall k og et naturlig tall r slik at:

(1) $n = kl + r$,

(2) $0 \leq r < l$.

Det naturlige tallet k kalles *kvotient*, og det naturlige tallet r kalles *rest*.

Eksempel 1.2.2. La n være 5, og la l være 3. Da er $k = 1$ og $r = 2$, siden vi har:

(1) $5 = 1 \cdot 3 + 2$,

(2) $0 \leq 2 < 3$.

Eksempel 1.2.3. La n være 18, og la l være 5. Da er $k = 3$ og $r = 3$, siden vi har:

(1) $18 = 3 \cdot 5 + 3$,

(2) $0 \leq 3 < 5$.

Merknad 1.2.4. På barneskolen lærte du en metode for å finne k og r. Men hvordan vet vi at metoden alltid virker? Med andre ord, hvordan vet vi at vi alltid kan finne naturlige tall k og r som oppfyller kravene (1) og (2) i Merknad 1.2.1?

I denne delen av kapittelet skal vi *bevise* ved induskjon at det finnes, for alle naturlige tall n og l, naturlige tall k og r slik at (1) og (2) i Merknad 1.2.1 er sanne. Det følgende lemmaet er kjernen i beviset for Proposisjon 1.2.6.

Lemma 1.2.5. La n være et heltall slik at $n \geq 0$. La l være et naturlig tall. Anta at det finnes et heltall k og et heltall r slik at:

(1) $n = kl + r$,

(2) $0 \leq r < l$,

(3) $k \geq 0$.

Da finnes det et heltall k' og et heltall r' slik at:

(I) $n + 1 = k'l + r'$,

(II) $0 \leq r' < l$.

(III) $k' \geq 0$.

Bevis. Siden $0 \leq r < l$, er et av de følgende utsagnene sant:

(A) $r < l - 1$;

(B) $r = l - 1$.

Vi skal gjennomføre beviset i disse to tilfellene hver for seg.

Anta først at (A) er tilfellet. La da k' være k, og la r' være $r + 1$. Vi gjør følgende observasjoner.

(i) Fra (1) har vi:

$$n + 1 = (kl + r) + 1.$$

Derfor er:

$$\begin{aligned} n + 1 &= (kl + r) + 1 \\ &= kl + (r + 1) \\ &= k'l + r'. \end{aligned}$$

Dermed oppfyller k' og r' kravet (I).

(ii) Fra (2) har vi:

$$0 \leq r.$$

Derfor er

$$\begin{aligned} 0 &\leq r \\ &\leq r+1 \\ &= r'. \end{aligned}$$

Siden vi har antatt at (A) er sant, vet vi også at

$$r < l - 1.$$

Det følger at

$$r + 1 < l,$$

altså at

$$r' < l.$$

Dermed har vi bevist at

$$0 \leq r' < l.$$

Således oppfyller r' kravet (II).

(iii) Fra (3) har vi:

$$k \geq 0.$$

Siden $k' = k$, har vi altså:

$$k' \geq 0.$$

Dermed oppfyller k' kravet (III).

Fra (i) – (iii) konkluderer vi at lemmaet er sant i tilfellet (A).

Anta nå at (B) er tilfellet. La da k' være $k+1$, og la r' være 0. Vi gjør følgende observasjoner.

(i) Fra (1) har vi:

$$n + 1 = (kl + r) + 1.$$

Siden vi har antatt at (B) er sant, er $r = l - 1$. Derfor er

$$\begin{aligned} n + 1 &= (kl + r) + 1 \\ &= \big(kl + (l-1)\big) + 1 \\ &= kl + l - 1 + 1 \\ &= (k+1)l + 0 \\ &= k'l + r'. \end{aligned}$$

Dermed oppfyller k' og r' kravet (I).

(ii) Siden l er et naturlig tall, er $0 < l$. Siden $r' = 0$, er derfor $r' < l$. I tillegg er $0 \leq 0$, altså $0 \leq r'$. Dermed er
$$0 \leq r' < l.$$
Således oppfyller r' kravet (II).

(iii) Fra (3) har vi:
$$k \geq 0.$$
Siden $k' = k + 1$, deduserer vi at
$$k' \geq 0.$$
Dermed oppfyller k' kravet (III).

Fra (i) – (iii) konkluderer vi at lemmaet er sant i tilfellet (B).

□

Proposisjon 1.2.6. La n være et heltall slik at $n \geq 0$. La l være et naturlig tall. Da finnes det et heltall k og et heltall r slik at:

(I) $n = kl + r$,

(II) $0 \leq r < l$,

(III) $k \geq 0$.

Bevis. Først sjekker vi at proposisjonen er sann når $n = 0$. I dette tilfellet er utsagnet at det finnes, for et hvilket som helst naturlig tall l, et heltall k og et heltall r slik at:

(1) $0 = kl + r$

(2) $0 \leq r < l$,

(3) $k \geq 0$.

La k være 0, og la r være 0. Vi gjør følgende observasjoner.

(i) Vi har:
$$\begin{aligned} kl + r &= 0 \cdot l + 0 \\ &= 0 + 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$
Dermed oppfyller k og r kravet (1).

(ii) Siden l er et naturlig tall, er $0 < l$. Siden $r = 0$, er derfor $r < l$. I tillegg er $0 \leq 0$, altså $0 \leq r$. Dermed er
$$0 \leq r < l.$$
Således oppfyller r kravet (2).

(iii) Vi har: $0 \geq 0$. Siden $k = 0$, er derfor $k \geq 0$. Dermed oppfyller k kravet (3).

Fra (i) – (iii) konkluderer vi at utsagnet er sant.

Anta nå at proposisjonen har blitt bevist når n er et gitt helltall m slik at $m \geq 0$. Således har det blitt bevist at det finnes, for et hvilket som helst naturlig tall l, et heltall k og et heltall r slik at:

(1) $m = kl + r$,

(2) $0 \leq r < l$,

(3) $k \geq 0$.

Da følger det fra Lemma 1.2.5 at det finnes et heltall k' og et heltall r' slik at:

(1) $m + 1 = k'l + r'$,

(2) $0 \leq r' < l$,

(3) $k' \geq 0$.

Dermed er proposisjonen sann når $n = m + 1$.

Ved induksjon konkluderer vi at proposisjonen er sann når n er et hvilket som helst naturlig tall. $\square$

Terminologi 1.2.7. I Merknad 1.4.3 så vi at induksjon gir en algoritme for å konstruere et bevis for en matematisk påstand. Således gir beviset for Proposisjon 1.2.6 en algoritme for å finne k og r. Denne algoritmen kalles noen ganger *divisjonsalgoritmen*.

Eksempel 1.2.8. La oss se hvordan divisjonsalgoritmen ser ut når $n = 3$ og $l = 2$.

(1) Vi begynner med å observere at:

$$0 = 0 \cdot 2 + 0.$$

(2) Som i beviset for Lemma 1.2.5 i tilfellet (A), observerer vi at det følger at

$$1 = 0 \cdot 2 + 1.$$

(3) Som i beviset for Lemma 1.2.5 i tilfellet (B), observerer vi at det følger at

$$2 = 1 \cdot 2 + 0.$$

(4) Som i beviset for Lemma 1.2.5 i tilfellet (A), observerer vi at det følger at

$$3 = 1 \cdot 2 + 1.$$

Dermed er $k = 1$ og $r = 1$.

Eksempel 1.2.9. La oss se hvordan divisjonsalgoritmen ser ut når $n = 6$ og $l = 4$.

(1) Vi begynner med å observere at:
$$0 = 0 \cdot 4 + 0.$$

(2) Som i beviset for Lemma 1.2.5 i tilfellet (A), observerer vi at det følger at
$$1 = 0 \cdot 4 + 1.$$

(3) Som i beviset for Lemma 1.2.5 i tilfellet (A), observerer vi at det følger at
$$2 = 0 \cdot 4 + 2.$$

(4) Som i beviset for Lemma 1.2.5 i tilfellet (A), observerer vi at det følger at
$$3 = 0 \cdot 4 + 3.$$

(5) Som i beviset for Lemma 1.2.5 i tilfellet (B), observerer vi at det følger at
$$4 = 1 \cdot 4 + 0.$$

(6) Som i beviset for Lemma 1.2.5 i tilfellet (A), observerer vi at det følger at
$$5 = 1 \cdot 4 + 1.$$

(7) Som i beviset for Lemma 1.2.5 i tilfellet (A), observerer vi at det følger at
$$6 = 1 \cdot 4 + 2.$$

Dermed er $k = 1$ og $r = 2$.

Eksempel 1.2.10. La oss se hvordan divisjonsalgoritmen ser ut når $n = 7$ og $l = 3$.

(1) Vi begynner med å observere at:
$$0 = 0 \cdot 3 + 0.$$

(2) Som i beviset for Lemma 1.2.5 i tilfellet (A), observerer vi at det følger at
$$1 = 0 \cdot 3 + 1.$$

(3) Som i beviset for Lemma 1.2.5 i tilfellet (A), observerer vi at det følger at
$$2 = 0 \cdot 3 + 2.$$

(4) Som i beviset for Lemma 1.2.5 i tilfellet (B), observerer vi at det følger at

$$3 = 1 \cdot 3 + 0.$$

(5) Som i beviset for Lemma 1.2.5 i tilfellet (A), observerer vi at det følger at

$$4 = 1 \cdot 3 + 1.$$

(6) Som i beviset for Lemma 1.2.5 i tilfellet (A), observerer vi at det følger at

$$5 = 1 \cdot 3 + 2.$$

(7) Som i beviset for Lemma 1.2.5 i tilfellet (B), observerer vi at det følger at

$$6 = 2 \cdot 3 + 0.$$

(8) Som i beviset for Lemma 1.2.5 i tilfellet (A), observerer vi at det følger at

$$7 = 2 \cdot 3 + 1.$$

Dermed er $k = 2$ og $r = 1$.

Korollar 1.2.11. La n være et heltall. La l være et heltall slik at $l \neq 0$. Da finnes det et heltall k og et heltall r slik at:

(I) $n = kl + r$,

(II) $0 \leq r < |l|$.

Bevis. Ett av følgende utsagn er sant:

(A) $l > 0$ og $n \geq 0$;

(B) $l < 0$ og $n \geq 0$;

(C) $l > 0$ og $n < 0$;

(D) $l < 0$ og $n < 0$;

Anta først at (A) er tilfellet. Da er l et naturlig tall. Det følger fra Proposisjon 1.2.6 at det finnes et heltall k' og et heltall r' slik at:

(i) $n = k'l + r'$,

(ii) $0 \leq r' < l$.

Siden $|l| = l$, deduserer vi at proposisjonen er sann i dette tilfellet, ved å la k være k' og å la r være r'.

Anta nå at (B) er tilfellet. Da er $-l$ et naturlig tall. Det følger fra Proposisjon 1.2.6 at det finnes et heltall k' og et heltall r' slik at:

(i) $n = k' \cdot (-l) + r'$,

(ii) $0 \leq r' < -l$.

Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Det følger fra (i) at
$$n = (-k') \cdot l + r'.$$

(2) Vi har: $|l| = -l$. Derfor følger det fra (ii) at
$$0 \leq r' < |l|.$$

Dermed er proposisjonen sann i dette tilfellet også, ved å la k være $-k'$ og å la r være r'.

Anta nå at (C) er tilfellet. Da er $-n \geq 0$. Det følger fra Proposisjon 1.2.6 at det finnes et heltall k' og et heltall r' slik at:

(i) $-n = k' \cdot l + r'$,

(ii) $0 \leq r' < l$.

Ett av følgende utsagn er sant.

(a) $r' = 0$.

(b) $0 < r' < l$.

Anta først at $r' = 0$. Det følger fra (i) at
$$n = (-k') \cdot l.$$

Dermed er proposisjonen sann i dette tilfellet, ved å la k være k', og å la r være 0.

Anta nå at $0 < r' < l$. Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Det følger fra (i) at
$$\begin{aligned} n &= -k' \cdot l - r' \\ &= -k' \cdot l - l + l - r' \\ &= (-k' - 1) \cdot l + (l - r'). \end{aligned}$$

(2) Siden $0 < r' < l$, er $0 < l - r' < l$.

Dermed er proposisjonen sann i dette tilfellet også, ved å la k være $-k' - 1$, og å la r være $l - r'$. Således har vi bevist at proposisjonen er sann i tilfellet (C).

Anta nå at (D) er tilfellet. Da er $-n \geq 0$. I tillegg er $-l$ et naturlig tall. Det følger fra Proposisjon 1.2.6 at det finnes et heltall k' og et heltall r' slik at:

(i) $-n = k' \cdot (-l) + r'$,

(ii) $0 \leq r' < -l$.

Ett av følgende utsagn er sant.

(a) $r' = 0$.

(b) $0 < r' < -l$.

Anta først at $r' = 0$. Det følger fra (i) at

$$n = k' \cdot l.$$

I tillegg har vi: $|l| = -l$. Dermed er proposisjonen sann i dette tilfellet, ved å la k være k', og å la r være 0.

Anta nå at $0 < r' < -l$. Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Det følger fra (i) at

$$\begin{aligned} n &= k' \cdot l - r' \\ &= k' \cdot l + l - l - r' \\ &= (k' + 1) \cdot l + (-l - r'). \end{aligned}$$

(2) Siden $0 < r' < -l$, er $0 < -l - r' < -l$.

(3) Vi har: $|l| = -l$. Derfor følger det fra (2) at

$$0 < -l - r' < |l|.$$

Fra (1) og (3) konkluderer vi at proposisjonen er sann i dette tilfellet også, ved å la k være $k' + 1$, og å la r være $-l - r'$. Således har vi bevist at proposisjonen er sann i tilfellet (D).

□

Eksempel 1.2.12. La $n = -5$, og la l være 2. For å få heltall k og r slik at

$$-5 = k \cdot 2 + r$$

og $0 \leq r < 2$, fastslår beviset for Korollar 1.2.11 at vi kan gjøre følgende.

(1) Benytt divisjonsalgoritmen i tilfellet $n = 5$ og $l = 2$. Vi hopper over detaljene. Resultatet er:

$$5 = 2 \cdot 2 + 1.$$

(2) Observer at det følger fra (1) at

$$\begin{aligned} -5 &= -2 \cdot 2 - 1 \\ &= -2 \cdot 2 - 2 + 2 - 1 \\ &= (-2-1) \cdot 2 + (2-1) \\ &= (-3) \cdot 2 + 1. \end{aligned}$$

Dermed er

$$-5 = (-3) \cdot 2 + 1,$$

og $0 \leq 1 < 2$. Således er $k = -3$ og $r = 1$.

Eksempel 1.2.13. La $n = 8$, og la l være -3. For å få heltall k og r slik at

$$8 = k \cdot (-3) + r$$

og $0 \leq r < 3$, fastslår beviset for Korollar 1.2.11 at vi kan gjøre følgende.

(1) Benytt divisjonsalgoritmen i tilfellet $n = 8$ og $l = 3$. Vi hopper over detaljene. Resultatet er:

$$8 = 2 \cdot 3 + 2.$$

(2) Observer at det følger fra (1) at

$$8 = (-2) \cdot (-3) + 2.$$

I tillegg er $0 \leq 2 < 3$. Således er $k = -2$ og $r = 2$.

Eksempel 1.2.14. La $n = -7$, og la l være -4. For å få heltall k og r slik at

$$-7 = k \cdot (-4) + r$$

og $0 \leq r < 4$, fastslår beviset for Korollar 1.2.11 at vi kan gjøre følgende.

(1) Benytt divisjonsalgoritmen i tilfellet $n = 7$ og $l = 4$. Vi hopper over detaljene. Resultatet er:

$$7 = 1 \cdot 4 + 3.$$

(2) Observer at det følger fra (1) at

$$\begin{aligned} -7 &= 1 \cdot (-4) - 3 \\ &= 1 \cdot (-4) + (-4) - (-4) - 3 \\ &= (1+1) \cdot (-4) + (4-3) \\ &= 2 \cdot (-4) + 1. \end{aligned}$$

Dermed er

$$-7 = 2 \cdot (-4) + 1,$$

og $0 \leq 1 < 4$. Således er $k = 2$ og $r = 1$.

Oppgaver

O2.2 Oppgaver for å hjelpe med å forstå forelesningen

Oppgave O2.2.1. Hva er absoluttverdiene til de følgende heltallene:

(1) -83;

(2) 45;

(3) 6;

(4) -1257.

Oppgave O2.2.2. Beskriv hvordan divisjonsalgoritmen ser ut i de følgende tilfellene:

(1) $n = 8$ og $l = 5$;

(2) $n = 11$ og $l = 3$;

(3) $n = 10$ og $l = 5$.

Tips: Se Eksempel 1.2.8 – Eksempel 1.2.10.

Oppgave O2.2.3. Beskriv hvordan beviset for Korollar 1.2.11 ser ut i de følgende tilfellene:

(1) $n = -9$ og $l = 4$.

(2) $n = 8$ og $l = -3$.

(3) $n = -13$ og $l = -5$.

(4) $n = -10$ og $l = 2$.

Tips: Se Eksempel 1.2.12 – 1.2.14.