Forelesning 8 — torsdag den 11. september

2.2 Divisjonsalgoritmen — forts.

Proposisjon 2.2.15. La n være et heltall. La l være et naturlig tall. La k og r være heltall slik at:

(I) $n = kl + r$,

(II) $0 \leq r < l$.

La k' og r' også være heltall slik at:

(III) $n = k'l + r'$,

(IV) $0 \leq r' < l$.

Da er $k = k'$ og $r = r'$.

Bevis. Anta først at $k \geq k'$. Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Fra (I) og (III) har vi:

$$\begin{aligned} r' - r &= (n - k'l) - (n - kl) \\ &= n - n - k'l + kl \\ &= kl - k'l \\ &= (k - k')l. \end{aligned}$$

(2) Fra (II) har vi: $0 \leq r$. Derfor er $-r \leq 0$. Det følger at $r' - r \leq r'$.

(3) Fra (IV) har vi: $r' < l$.

(4) Det følger fra (2) og (3) at

$$\begin{aligned} r' - r &\leq r' \\ &< l. \end{aligned}$$

Dermed er $r' - r < l$.

(5) Fra (1) og (4) har vi:

$$\begin{aligned} (k - k')l &= r' - r \\ &< l. \end{aligned}$$

Dermed er $(k - k')l < l$. Derfor er $k - k' < 1$.

(6) Siden $k \geq k'$, er $k - k' \geq 0$.

(7) Siden k og k' er heltall, er $k - k'$ et heltall.

(8) Fra (5) – (7) har vi: $k - k'$ er et heltall og

$$0 \leq k - k' < 1.$$

Derfor er $k - k' = 0$. Vi deduserer at $k = k'$.

(9) Det følger fra (1) og (8) at

$$\begin{aligned} r' - r &= (k - k')l \\ &= 0 \cdot l \\ &= 0. \end{aligned}$$

Vi deduserer at $r = r'$.

Anta nå at $k < k'$, altså at $k' \geq k$. Da gjennomfører vi akkurat det samme argumentet ved å bytte om k og k' og å bytte om r og r'.

$\square$

Merknad 2.2.16. La k og r være de heltallene vi får ved å benytte divisjonsalgoritmen. Proposisjon 2.2.15 fastslår at k og r er de *entydige* heltallene, det vil si de *eneste* heltallene, som oppfyller kravene (I) – (II) i Proposisjon 1.2.6.

Merknad 2.2.17. I praksis *må* vi ikke benytte divisjonsalgoritmen for å finne k og r. Faktisk kommer vi fortere til k og r ved å benytte metoden du lærte på barneskolen! Vi kan også godt prøve å gjette k og r, og sjekke om gjetningen er riktig. Proposisjon 2.2.15 fastslår at uansett hvordan vi kommer fram til k og r, får vi de samme heltallene som ved å benytte divisjonsalgoritmen.

Dette er et avgjørende poeng. Proposisjon 1.2.6 sier noe om *eksistensen* av heltallene k og r, mens Proposisjon 2.2.15 sier noe om *entydigheten* av k og r. Den beste måten å bevise teoretisk at en matematisk påstand er sann er ikke nødvendigvis den beste å gjennomføre i praksis. Den beste situasjonen er at vi har, som her, en proposisjon som garanterer at alle metoder er like verdige.

Eksempel 2.2.18. La n være 64, og la l være 17. Siden

$$64 = 3 \cdot 17 + 13,$$

fastslår Proposisjon 2.2.15 at vi får $k = 3$ og $r = 13$ ved å bruke divisjonsalgoritmen som i Eksempel 1.2.8 – Eksempel 1.2.10.

Eksempel 2.2.19. La n være 127, og la l være 23. Siden

$$127 = 5 \cdot 23 + 12,$$

fastslår Proposisjon 2.2.15 at vi får $k = 5$ og $r = 12$ ved å bruke divisjonsalgoritmen som i Eksempel 1.2.8 – Eksempel 1.2.10.

Korollar 2.2.20. La n være et heltall. La l være et heltall slik at $l \neq 0$. La k og r være heltall slik at:

(I) $n = kl + r$,

(II) $0 \leq r < |l|$,

La k' og r' også være heltall slik at:

(III) $n = k'l + r'$,

(IV) $0 \leq r' < |l|$.

Da er $k = k'$ og $r = r'$.

Bevis. Ett av følgende utsagn er sant:

(1) $l > 0$;

(2) $l < 0$.

Anta først at $l > 0$. Da er l et naturlig tall, og $|l| = l$. Derfor følger det fra Proposisjon 2.2.15 at $k = k'$ og $r = r'$.

Anta nå at $l < 0$. Da er $-l$ et naturlig tall, og $|l| = -l$. Derfor følger det fra Proposisjon 2.2.15 for heltallet n og det naturlige tallet $-l$ at $k = k'$ og $r = r'$.

□

Merknad 2.2.21. Korollar 2.2.20 fastslår at uansett hvordan vi kommer fram til k og r, får vi de samme heltallene som ved å benytte tilnærmingsmetoden i Eksempel 1.2.12 – 1.2.14. Sammenlign med Merknad 2.2.17.

Eksempel 2.2.22. La n være -33, og la l være 12. Siden

$$-33 = -3 \cdot 12 + 3,$$

fastslår Korollar 2.2.20 at vi får $k = -33$ og $r = 3$ ved å bruke tilsnærmingsmetoden i Eksempel 1.2.12 – 1.2.14.

Eksempel 2.2.23. La n være 25, og la l være -7. Siden

$$25 = -3 \cdot -7 + 4,$$

fastslår Korollar 2.2.20 at vi får $k = -3$ og $r = 4$ ved å bruke tilsnærmingsmetoden i Eksempel 1.2.12 – 1.2.14.

Eksempel 2.2.24. La n være -156, og la l være -38. Siden

$$-156 = 5 \cdot -38 + 34,$$

fastslår Korollar 2.2.20 at vi får $k = 5$ og $r = 34$ ved å bruke tilsnærmingsmetoden i Eksempel 1.2.12 – 1.2.14.

Proposisjon 2.2.25. La m og n være heltall. La l være et heltall slik at $l \neq 0$. Anta at $lm = ln$. Da er $m = n$.

Bevis. Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Siden $lm = ln$, er
$$0 = lm - ln,$$
altså
$$0 = (m - n) \cdot l$$

(2) Vi har:
$$0 = 0 \cdot l.$$

Fra (1), (2), og Korollar 2.2.20 følger det at
$$m - n = 0,$$
altså at $m = n$.

□

Merknad 2.2.26. Vi er vant til å kunne fjerne l fra begge sider av ligningen
$$lm = ln.$$
Proposisjon 2.2.25 fastslår formelt at dette er en gyldig algebraisk manipulasjon.

Er det ikke nok å si: «vi deler begge sider av ligningen med l»? Jo, men hva mener vi egentlig med dette? Poenget med Proposisjon 2.2.25 er at Korollar 2.2.20 gir oss muligheten til formelt å gjennomføre argumentene vi hadde kommet fram til om vi funderte på dette spørsmålet.

2.3 Partall og oddetall

Terminologi 2.3.1. Ved å la l være 2 i Korollar 1.2.11, får vi at, for et hvilket som helst heltall n, det finnes et heltall k slik at enten $n = 2k$ eller $n = 2k + 1$.

(1) Dersom $n = 2k$, sier vi at n er et *partall*.

(2) Dersom $n = 2k + 1$, sier vi at n er et *oddetall*.

Merknad 2.3.2. Det følger fra Proposisjon 2.2.15 at et heltall ikke kan være både et partall og et oddetall!

Eksempel 2.3.3. Siden $57 = 2 \cdot 28 + 1$, er 57 et oddetall.

Eksempel 2.3.4. Siden $26 = 2 \cdot 13$, er 26 et partall.

Eksempel 2.3.5. Siden $-3 = 2 \cdot (-2) + 1$, er -3 et oddetall.

2.4 Eksempler på bevis som benytter divisjonsalgoritmen

Merknad 2.4.1. La n være et heltall, og la l være heltall slik at $l \neq 0$. Korollar 1.2.11 sier at det finnes et heltall k slik at n er lik et av de følgende heltallene: kl, $kl+1$, $kl+2$, $\ldots$, $kl+|l|-1$. Når l er for eksempel 5, fastslår korollaret at, for alle heltall n, det finnes et heltall k slik at n er lik et av de følgende heltallene: $5k$, $5k+1$, $5k+2$, $5k+3$, $5k+4$.

For å bevise en matematisk påstand om heltall, kan vi derfor:

(1) velge et heltall l;

(2) sjekke om påstanden er sann, for alle heltall k, i hvert av de følgende tilfellene: $n = kl$, $n = kl+1$, $n = kl+2$, $\ldots$, $n = kl+|l|-1$.

Vi skal nå se på noen eksempler hvor denne tilnærmingsmetoden benyttes.

Proposisjon 2.4.2. La n være et heltall. Da finnes det et heltall m slik at enten $n^2 = 4m$ eller $n^2 = 4m+1$.

Bevis. Ved å la l være 2 i Korollar 1.2.11, får vi at det finnes et heltall k slik at ett av følgende utsagn er sant:

(1) $n = 2k$,

(2) $n = 2k+1$.

Anta først at (1) er sant. La m være k^2. Da er

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k)^2 \\ &= 4k^2 \\ &= 4m. \end{aligned}$$

Dermed er proposisjonen sann i dette tilfellet.

Anta nå at (2) er sant. La m være k^2+k. Da er

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2+4k+1 \\ &= 4(k^2+k)+1 \\ &= 4m+1. \end{aligned}$$

Dermed er proposisjonen sann i dette tilfellet også.

□

Eksempel 2.4.3. Når $n = 3$, fastslår Proposisjon 2.4.2 at det finnes et heltall m slik at enten $3^2 = 4m$ eller $3^2 = 4m+1$, altså slik at enten $9 = 4m$ eller $9 = 4m+1$. Det er nemlig sant at $9 = 4 \cdot 2 + 1$.

Eksempel 2.4.4. Når $n = 6$, fastslår Proposisjon 2.4.2 at det finnes et heltall m slik at enten $6^2 = 4m$ eller $6^2 = 4m + 1$, altså slik at enten $36 = 4m$ eller $36 = 4m + 1$. Det er nemlig sant at $36 = 4 \cdot 9$.

Eksempel 2.4.5. Når $n = 57$, fastslår Proposisjon 2.4.2 at det finnes et heltall m slik at enten $57^2 = 4m$ eller $57^2 = 4m+1$, altså slik at enten $3249 = 4m$ eller $3249 = 4m+1$. Det er nemlig sant at $3249 = 4 \cdot 812 + 1$.

Eksempel 2.4.6. Når $n = -6$, faststlår Proposisjon 2.4.2 at det finnes et heltall m slik at enten $(-6)^2 = 4m$ eller $(-6)^2 = 4m+1$, altså slik at enten $36 = 4m$ eller $36 = 4m+1$. Det er nemlig sant at $36 = 4 \cdot 9$.

Eksempel 2.4.7. Når $n = -7$, faststlår Proposisjon 2.4.2 at det finnes et heltall m slik at enten $(-7)^2 = 4m$ eller $(-7)^2 = 4m+1$, altså slik at enten $49 = 4m$ eller $49 = 4m+1$. Det er nemlig sant at $49 = 4 \cdot 12 + 1$.

Merknad 2.4.8. For å oppsummere beviset for Proposisjon 2.4.2, delte vi det opp i to tilfeller:

(1) hvor n er et partall;

(2) hvor n er et oddetall.

Vi beviste at Proposisjon 2.4.2 er sann i disse to tilfellene hver for seg.

Proposisjon 2.4.9. La n være et oddetall. Da finnes det et heltall m slik at $n^2 = 8m+1$.

Bevis. Ved å la l være 4 i Korollar 1.2.11, får vi at det finnes et heltall k slik at ett av følgende utsagn er sant:

(1) $n = 4k$,

(2) $n = 4k + 1$,

(3) $n = 4k + 2$,

(4) $n = 4k + 3$.

Siden n er et oddetall, må faktisk enten (2) eller (4) være sant.

Anta først at (2) er sant. La m være $2k^2 + k$. Da er

$$\begin{aligned} n^2 &= (4k+1)^2 \\ &= 16k^2 + 8k + 1 \\ &= 8\left(2k^2 + k\right) + 1 \\ &= 8m + 1. \end{aligned}$$

Dermed er proposisjonen sann i dette tilfellet.

Anta nå at (4) er sant. La m være $2k^2 + 3k + 1$. Da er

$$\begin{aligned} n^2 &= (4k+3)^2 \\ &= 16k^2 + 24k + 9 \\ &= \left(16k^2 + 24k + 8\right) + 1 \\ &= 8\left(2k^2 + 3k + 1\right) + 1 \\ &= 8m + 1. \end{aligned}$$

Dermed er proposisjonen sann i dette tilfellet også.

□

Eksempel 2.4.10. Når $n = 5$, fastslår Proposisjon 2.4.9 at det finnes et heltall m slik at $5^2 = 8m + 1$, altså slik at $25 = 8m + 1$. Det er nemlig sant at $25 = 8 \cdot 3 + 1$.

Eksempel 2.4.11. Når $n = 9$, fastslår Proposisjon 2.4.9 at det finnes et heltall m slik at $9^2 = 8m + 1$, altså slik at $81 = 8m + 1$. Det er nemlig sant at $81 = 8 \cdot 10 + 1$.

Eksempel 2.4.12. Når $n = 57$, fastslår Proposisjon 2.4.9 at det finnes et heltall m slik at $57^2 = 8m + 1$, altså slik at $3249 = 8m + 1$. Det er nemlig sant at $3249 = 8 \cdot 406 + 1$.

Eksempel 2.4.13. Når $n = -7$, fastslår Proposisjon 2.4.9 at det finnes et heltall m slik at $(-7)^2 = 8m + 1$, altså slik at $49 = 8m + 1$. Det er nemlig sant at $49 = 8 \cdot 6 + 1$.

Eksempel 2.4.14. Når $n = -11$, fastslår Proposisjon 2.4.9 at det finnes et heltall m slik at $(-11)^2 = 8m+1$, altså slik at enten $121 = 8m+1$. Det er nemlig sant at $121 = 8\cdot 15+1$.

Merknad 2.4.15. Utsagnet i Proposisjon 2.4.9 er gal når n er et partall, siden n^2 er et partall om n er et partall, men $8m + 1$ er et oddetall for alle heltall m. Et riktig utsagn er at det finnes et heltall m slik at enten $n^2 = 8m$ eller $n^2 = 8m + 4$ når n er et partall.

Proposisjon 2.4.16. La n være et heltall. Da finnes det et heltall m slik at ett av følgende utsagn er sant:

(1) $n^3 = 9m$

(2) $n^3 = 9m + 1$

(3) $n^3 = 9m + 8$.

Bevis. Ved å la l være 3 i Korollar 1.2.11, får vi at det finnes et heltall q slik at ett av følgende utsagn er sant:

(1) $n = 3k$,

(2) $n = 3k + 1$,

(3) $n = 3k + 2$.

Anta først at (1) er sant. La m være $3k^3$. Da er

$$\begin{aligned} n^3 &= (3k)^3 \\ &= 27k^3 \\ &= 9 \cdot (3k^3) \\ &= 9m. \end{aligned}$$

Dermed er proposisjonen sann i dette tilfellet.

Anta nå at (2) er sant. La m være $3k^3 + 3k^2 + k$. Ut ifra Proposisjon 1.9.30 er

$$\begin{aligned} (3k+1)^3 &= \binom{3}{0} \cdot (3k)^3 \cdot 1^0 + \binom{3}{1} \cdot (3k)^2 \cdot 1^1 + \binom{3}{2} \cdot (3k)^1 \cdot 1^2 + \binom{3}{3} \cdot (3k)^0 \cdot 1^3 \\ &= (3k)^3 + 3 \cdot (3k)^2 + 3 \cdot (3k) + 1 \\ &= 3^3 \cdot k^3 + 3^3 \cdot k^2 + 3^2 \cdot k + 1. \end{aligned}$$

Derfor er

$$\begin{aligned} n^3 &= (3k+1)^3 \\ &= 3^3 \cdot k^3 + 3^3 \cdot k^2 + 3^2 \cdot k + 1 \\ &= (3^2) \cdot \big(3k^3 + 3k^2 + k\big) + 1 \\ &= 9m + 1. \end{aligned}$$

Dermed er proposisjonen sann i dette tilfellet.

Anta nå at (3) er sant. La m være $3k^3 + 6k^2 + 4k$. Ut ifra Proposisjon 1.9.30 er

$$\begin{aligned} (3k+2)^3 &= \binom{3}{0} \cdot (3k)^3 \cdot 2^0 + \binom{3}{1} \cdot (3k)^2 \cdot 2^1 + \binom{3}{2} \cdot (3k)^1 \cdot 2^2 + \binom{3}{3} \cdot (3k)^0 \cdot 2^3 \\ &= (3k)^3 + 3 \cdot (3k)^2 \cdot 2 + 3 \cdot (3k) \cdot 2^2 + 2^3 \\ &= 3^3 \cdot k^3 + 3^3 \cdot 2 \cdot k^2 + 3^2 \cdot 4 \cdot k + 8. \end{aligned}$$

Derfor er

$$\begin{aligned} n^3 &= (3k+2)^3 \\ &= 3^3 \cdot k^3 + 3^3 \cdot 2 \cdot k^2 + 3^2 \cdot 4 \cdot k + 8 \\ &= (3^2) \cdot \big(3k^3 + 3 \cdot 2 \cdot k^2 + 4k\big) + 8 \\ &= 9\left(3k^3 + 6k^2 + 4k\right) + 8 \\ &= 9m + 8. \end{aligned}$$

Dermed er proposisjonen sann i dette tilfellet også.

□

Eksempel 2.4.17. Når $n = 4$, fastslår Proposisjon 2.4.16 at det finnes et heltall m slik at ett av følgende utsagn er sant:

(1) $4^3 = 9m$, altså $64 = 9m$;

(2) $4^3 = 9m + 1$, altså $64 = 9m + 1$;

(3) $4^3 = 9m + 8$, altså $64 = 9m + 8$;

Det er nemlig sant at $84 = 9 \cdot 7 + 1$.

Eksempel 2.4.18. Når $n = 11$, fastslår Proposisjon 2.4.16 at det finnes et heltall m slik at ett av følgende utsagn er sant:

(1) $11^3 = 9m$, altså $1331 = 9m$;

(2) $11^3 = 9m + 1$, altså $1331 = 9m + 1$;

(3) $11^3 = 9m + 8$, altså $1331 = 9m + 8$.

Det er nemlig sant at $1331 = 9 \cdot 147 + 8$.

Eksempel 2.4.19. Når $n = 57$, fastslår Proposisjon 2.4.16 at det finnes et heltall m slik at ett av følgende utsagn er sant:

(1) $57^3 = 9m$, altså $185193 = 9m$;

(2) $57^3 = 9m + 1$, altså $185193 = 9m + 1$;

(3) $57^3 = 9m + 8$, altså $185193 = 9m + 8$.

Det er nemlig sant at $185193 = 9 \cdot 20557$.

Eksempel 2.4.20. Når $n = -7$, fastslår Proposisjon 2.4.16 at det finnes et heltall m slik at ett av følgende utsagn er sant:

(1) $(-7)^3 = 9m$, altså $-343 = 9m$;

(2) $(-7)^3 = 9m + 1$, altså $-343 = 9m + 1$;

(3) $(-7)^3 = 9m + 8$, altså $-343 = 9m + 8$;

Det er nemlig sant at $-343 = 9 \cdot (-39) + 8$.

Eksempel 2.4.21. Når $n = -8$, fastslår Proposisjon 2.4.16 at det finnes et heltall m slik at ett av følgende utsagn er sant:

(1) $(-8)^3 = 9m$, altså $-512 = 9m$;

(2) $(-8)^3 = 9m + 1$, altså $-512 = 9m + 1$;

(3) $(-8)^3 = 9m + 8$, altså $-512 = 9m + 8$.

Det er nemlig sant at $-512 = 9 \cdot (-57) + 1$.

Eksempel 2.4.22. Når $n = -12$, fastslår Proposisjon 2.4.16 at det finnes et heltall m slik at ett av følgende utsagn er sant:

(1) $(-12)^3 = 9m$, altså $-1728 = 9m$;

(2) $(-12)^3 = 9m + 1$, altså $-1728 = 9m + 1$;

(3) $(-12)^3 = 9m + 8$, altså $-1728 = 9m + 8$.

Det er nemlig sant at $-1728 = 9 \cdot (-192)$.

2.5 Grunnleggende proposisjoner om delbarhet

Definisjon 2.5.1. La l og n være heltall. Da er n *delelig med* l dersom det finnes et heltall k slik at $n = kl$.

Notasjon 2.5.2. La l og n være heltall. Dersom n er delelig med l, skriver vi $l \mid n$.

Terminologi 2.5.3. La l og n være heltall. Dersom n er delelig med l, sier vi at l er en *divisor* til n.

Eksempel 2.5.4. Siden $6 = 3 \cdot 2$, er 6 delelig med 2. Derfor skriver vi: $2 \mid 6$.

Eksempel 2.5.5. Siden $16 = 4 \cdot 4$, er 16 delelig med 4. Derfor skriver vi: $4 \mid 16$.

Eksempel 2.5.6. Siden $-15 = (-5) \cdot 3$, er -15 delelig med 3. Derfor skriver vi: $3 \mid -15$.

Eksempel 2.5.7. La n være et hvilket som helst naturlig tall. Siden $n = n \cdot 1$, er n delelig med 1. Derfor skriver vi: $1 \mid n$.

Merknad 2.5.8. La l og n være heltall. Fra Korollar 1.2.11 vet vi at det alltid er et heltall k og et heltall r slik at:

(I) $n = kl + r$,

(II) $0 \leq r < |l|$.

Anta at n er delelig med l, altså at det finnes et heltall k' slik at $n = k'l$. Da følger det fra Proposisjon 2.2.15 at $k = k'$ og at $r = 0$.

Hvis på en annen side $r > 0$, følger det fra Proposisjon 2.2.15 at n ikke er delelig med l.

Proposisjon 2.5.9. La l og n være heltall. Anta at $l \mid n$. Da er $-l \mid n$.

Bevis. Siden $l \mid n$, finnes det et heltall k slik at $n = kl$. Da er $n = (-k) \cdot (-l)$. Siden k er et heltall, er $-k$ et heltall. Vi konkluderer at $-l \mid n$. □

Eksempel 2.5.10. Siden $6 = 2 \cdot 3$, er $3 \mid 6$. Derfor er $-3 \mid 6$. Vi har: $6 = (-2) \cdot (-3)$.

Eksempel 2.5.11. Siden $-14 = 2 \cdot -7$, er $-7 \mid -14$. Derfor er $7 \mid -14$. Vi har: $-14 = (-2) \cdot 7$.

Proposisjon 2.5.12. La l og n være heltall. Anta at $l \mid n$. Da er $l \mid -n$.

Bevis. Oppgave O2.1.5. $\square$

Eksempel 2.5.13. Siden $20 = 4 \cdot 5$, er $5 \mid 20$. Derfor er $5 \mid -20$. Vi har: $-20 = (-4) \cdot 5$.

Eksempel 2.5.14. Siden $-33 = (-11) \cdot 3$, er $3 \mid -33$. Derfor er $3 \mid 33$. Vi har: $33 = 11 \cdot 3$.

Proposisjon 2.5.15. La l, l', n, og n' være heltall. Anta at $l \mid n$ og $l' \mid n'$. Da er $l \cdot l' \mid n \cdot n'$.

Bevis. Oppgave O2.1.6. $\square$

Eksempel 2.5.16. Siden $18 = 3 \cdot 6$ er $6 \mid 18$. Siden $56 = 14 \cdot 4$ er $4 \mid 56$. Derfor er $6 \cdot 4 \mid 18 \cdot 56$, altså $24 \mid 1008$. Vi har: $1008 = 42 \cdot 24$.

Eksempel 2.5.17. Siden $-15 = 5 \cdot (-3)$ er $-3 \mid -15$. Siden $-100 = (-10) \cdot 10$ er $10 \mid -100$. Derfor er $-3 \cdot 10 \mid (-15) \cdot (-100)$, altså $-30 \mid 1500$. Vi har: $1500 = (-50) \cdot (-30)$.

Korollar 2.5.18. La l', n, og n' være heltall. Anta at $l' \mid n'$. Da er $l' \mid n \cdot n'$.

Bevis. Følger umiddelbart fra Proposisjon 2.5.15 ved å la l være 1. $\square$

Eksempel 2.5.19. Siden $72 = 8 \cdot 9$ er $9 \mid 72$. Derfor er $9 \mid 4 \cdot 72$, altså $9 \mid 288$. Vi har: $288 = 32 \cdot 9$.

Eksempel 2.5.20. Siden $-12 = (-2) \cdot 6$ er $6 \mid -12$. Derfor er $6 \mid 63 \cdot (-12)$, altså $6 \mid -756$. Vi har: $-756 = (-126) \cdot 6$.

Korollar 2.5.21. La l, l', og n' være heltall. Anta at $l' \mid n'$. Da er $ll' \mid ln'$.

Bevis. Siden $l = 1 \cdot l$, har vi: $l \mid l$. Derfor følger utsagnet umiddelbart fra Proposisjon 2.5.15 ved å la n være l. $\square$

Eksempel 2.5.22. Siden $42 = 6 \cdot 7$ er $7 \mid 42$. Derfor er $8 \cdot 7 \mid 8 \cdot 42$, altså $56 \mid 336$. Vi har: $336 = 6 \cdot 56$.

Eksempel 2.5.23. Siden $-32 = 4 \cdot (-8)$ er $-8 \mid -32$. Derfor er $(-6) \cdot (-8) \mid (-6) \cdot (-32)$, altså $48 \mid 192$. Vi har: $192 = 4 \cdot 48$.

Proposisjon 2.5.24. La l, m, og n være heltall. Anta at $l \mid m$ og $l \mid n$. Da er $l \mid m + n$.

Bevis. Siden $l \mid m$, finnes det et heltall k slik at $m = kl$. Siden $l \mid n$, finnes det et heltall k' slik at $n = k'l$. Da er

$$\begin{aligned} m + n &= kl + k'l \\ &= (k + k')l. \end{aligned}$$

Siden k og k' er heltall, er $k + k'$ et heltall. Vi konkluderer at $l \mid m + n$. $\square$

Eksempel 2.5.25. Siden $14 = 2 \cdot 7$ er $7 \mid 14$. Siden $63 = 9 \cdot 7$ er $7 \mid 63$. Derfor er $7 \mid 14 + 63$, altså $7 \mid 77$. Vi har: $77 = 11 \cdot 7$.

Eksempel 2.5.26. Siden $-16 = (-4) \cdot 4$ er $4 \mid -16$. Siden $-32 = (-8) \cdot 4$ er $4 \mid -32$. Derfor er $4 \mid (-16) + (-32)$, altså $4 \mid -48$. Vi har: $-48 = (-12) \cdot 4$.

Proposisjon 2.5.27. La l, m, og n være heltall. Anta at $l \mid m$ og at $m \mid n$. Da er $l \mid n$.

Bevis. Siden $l \mid m$, finnes det et heltall k slik at $m = kl$. Siden $m \mid n$, finnes det et heltall k' slik at $n = k'm$. Da er

$$\begin{aligned} n &= k'm \\ &= k'(kl) \\ &= (k'k)l. \end{aligned}$$

Siden k og k' er heltall, er kk' et heltall. Vi konkluderer at $l \mid n$.

□

Eksempel 2.5.28. Siden $24 = 3 \cdot 8$ er $8 \mid 24$. Siden $72 = 3 \cdot 24$ er $24 \mid 72$. Derfor er $7 \mid 8 \mid 72$. Vi har: $72 = 9 \cdot 8$.

Eksempel 2.5.29. Siden $-21 = 3 \cdot (-7)$ er $-7 \mid -21$. Siden $63 = (-3) \cdot (-21)$ er $63 \mid -21$. Derfor er $-7 \mid 63$. Vi har: $63 = (-9) \cdot (-7)$.

Proposisjon 2.5.30. La l og n være naturlige tall. Anta at $l \mid n$. Da er $l \leq n$.

Bevis. Siden $l \mid n$ og både l og n er naturlige tall, finnes det et naturlig tall m slik at $n = ml$. Siden m er et naturlig tall, er $1 \leq m$. Derfor er

$$\begin{aligned} l &\leq ml \\ &= n. \end{aligned}$$

□

Eksempel 2.5.31. Siden $27 = 3 \cdot 9$, er $9 \mid 27$. Vi har: $9 \leq 27$.

Korollar 2.5.32. La l være et heltall, og la n være et heltall slik at $n \neq 0$. Anta at $l \mid n$. Da er $|l| \leq |n|$.

Bevis. Oppgave O2.1.7. □

Eksempel 2.5.33. Siden $-4 = 2 \cdot (-2)$, er $-2 \mid -4$. Vi har: $2 \leq 4$, altså $|-2| \leq |-4|$.

Eksempel 2.5.34. Siden $9 = (-3) \cdot (-3)$, er $-3 \mid 9$. Vi har: $3 \leq 9$, altså $|-3| \leq |9|$.

Oppgaver

O2.1 Oppgaver i eksamens stil

Oppgave O2.1.1. La n være et partall. Bevis at det er et heltall m slik at enten $n^2 = 8m$ eller $n^2 = 8m + 4$.

Oppgave O2.1.2. La n være et heltall. Bevis at det er et heltall m slik at enten $n^4 = 5m$ eller $n^4 = 5m + 1$. *Tips*: Benytt Proposisjon 1.9.30 i løpet av svaret ditt.

Oppgave O2.1.3. La n være et heltall. Anta at det er heltall s slik at $n = s^3$. Anta i tillegg at det er et heltall t slik at $n = t^2$. Bevis at det er et heltall m slik at enten $n = 7m$ eller $n = 7m + 1$. *Tips*: Gjør følgende.

(1) Bevis at det er et heltall m slik at et av de følgende utsagnene er sant:
   - (i) $n = 7m$;
   - (ii) $n = 7m + 1$;
   - (iii) $n = 7m + 6$.

   Benytt Proposisjon 1.9.30 og antakelsen at $n = s^3$ i løpet av svaret ditt.

(2) Bevis at det er et heltall m' slik at et av de følgende utsagnene er sant:
   - (i) $n = 7m'$;
   - (ii) $n = 7m' + 1$;
   - (iii) $n = 7m' + 2$;
   - (iv) $n = 7m' + 4$;

   Benytt antakelsen at $n = t^2$ i løpet av svaret ditt.

(3 Benytt Korollar 2.2.20 ved å la l være 7.

Oppgave O2.1.4. La n være et naturlig tall.

(1) Bevis at $7n^2 + 7n + 4$ er et partall.

(2) Bevis at $n(7n^2 + 5)$ er delelig med 6.

Tips: Benytt induksjon i beviset for (2). Sjekk i tillegg om ligningen

$$(m + 1)(7m^2 + 14m + 12) = m(7m^2 + 5) + (21m^2 + 21m + 12)$$

er sann for et hvilket som helst naturlig tall, og benytt denne ligningen i løpet av svaret ditt.

Oppgave O2.1.5. La l og n være heltall. Anta at $l \mid n$. Bevis at $l \mid -n$.

Oppgave O2.1.6. La l, l', n, og n' være heltall. Anta at $l \mid n$ og $l' \mid n'$. Bevis at $l \cdot l' \mid n \cdot n'$.

Oppgave O2.1.7. La l være et heltall, og la n være et heltall slik at $n \neq 0$. Anta at $l \mid n$. Ved å benytte Proposisjon 2.5.30, bevis at $|l| \leq |n|$.

O2.2 Oppgaver for å hjelpe med å forstå forelesningen

Oppgave O2.2.3. Hvilke heltall k og r får vi ved å bruke divisjonsalgoritmen når:

(1) $n = 348$ og $l = 39$,

(2) $n = 179$ og $l = 7$?

Tips: Se Merknad 2.2.17 og eksemplene som følger den.

Oppgave O2.2.4. Hvilke heltall k og r får vi ved å bruke divisjonsalgoritmen når:

(1) $n = 79$ og $l = -12$,

(2) $n = -87$ og $l = -11$,

(3) $n = -134$ og $l = -46$?

Tips: Se Merknad 2.2.21 og eksemplene som følger den.

Oppgave O2.2.5. Hvilke av de følgende heltallene er partall, og hvilke er oddetall? Som i Eksempel 2.3.3 – Eksempel 2.3.5, begrunn svaret ditt ved å referere til Terminologi 2.3.1.

(1) 46.

(2) -53

(3) -4.

(4) 16.

Oppgave O2.2.6. Hva fastslår Proposisjon 2.4.2 når $n = 15$? Hva er m i dette tilfellet? Gå gjennom beviset for Proposisjon 2.4.2 ved å erstatte n med 15. Hvilket at utsagnene (1) og (2) stemmer? Hva er k i dette tilfellet?

Oppgave O2.2.7. Hva fastslår Proposisjon 2.4.2 når $n = 20$? Hva er m i dette tilfellet? Gå gjennom beviset for Proposisjon 2.4.2 ved å erstatte n med 20. Hvilket at utsagnene (1) og (2) stemmer? Hva er k i dette tilfellet?

Oppgave O2.2.8. Hva fastslår Proposisjon 2.4.2 når $n = -10$? Hva er m i dette tilfellet? Gå gjennom beviset for Proposisjon 2.4.2 ved å erstatte n med -10. Hvilket at utsagnene (1) og (2) stemmer? Hva er k i dette tilfellet?

Oppgave O2.2.9. Hva fastslår Proposisjon 2.4.2 når $n = -5$? Hva er m i dette tilfellet? Gå gjennom beviset for Proposisjon 2.4.2 ved å erstatte n med -5. Hvilket at utsagnene (1) og (2) stemmer? Hva er k i dette tilfellet?

Oppgave O2.2.10. Hva fastslår Proposisjon 2.4.9 når $n = 7$? Hva er m i dette tilfellet? Gå gjennom beviset for Proposisjon 2.4.2 ved å erstatte n med 7. Hvilket at utsagnene (1) og (2) stemmer? Hva er k i dette tilfellet?

Oppgave O2.2.11. Hva fastslår Proposisjon 2.4.9 når $n = 13$? Hva er m i dette tilfellet? Gå gjennom beviset for Proposisjon 2.4.2 ved å erstatte n med 13. Hvilket at utsagnene (1) og (2) stemmer? Hva er k i dette tilfellet?

Oppgave O2.2.12. Hva fastslår Proposisjon 2.4.9 når $n = -5$? Hva er m i dette tilfellet? Gå gjennom beviset for Proposisjon 2.4.2 ved å erstatte n med -5. Hvilket at utsagnene (1) og (2) stemmer? Hva er k i dette tilfellet?

Oppgave O2.2.13. Hva fastslår Proposisjon 2.4.9 når $n = -9$? Hva er m i dette tilfellet? Gå gjennom beviset for Proposisjon 2.4.2 ved å erstatte n med -9. Hvilket at utsagnene (1) og (2) stemmer? Hva er k i dette tilfellet?

Oppgave O2.2.14. Hva fastslår Proposisjon 2.4.16 når $n = 5$? Hva er m i dette tilfellet? Gå gjennom beviset for Proposisjon 2.4.2 ved å erstatte n med 5. Hvilket at utsagnene (1) og (2) stemmer? Hva er k i dette tilfellet?

Oppgave O2.2.15. Hva fastslår Proposisjon 2.4.16 når $n = 10$? Hva er m i dette tilfellet? Gå gjennom beviset for Proposisjon 2.4.2 ved å erstatte n med 10. Hvilket at utsagnene (1) og (2) stemmer? Hva er k i dette tilfellet?

Oppgave O2.2.16. Hva fastslår Proposisjon 2.4.16 når $n = -12$? Hva er m i dette tilfellet? Gå gjennom beviset for Proposisjon 2.4.2 ved å erstatte n med -12. Hvilket at utsagnene (1) og (2) stemmer? Hva er k i dette tilfellet?

Oppgave O2.2.17. Hva fastslår Proposisjon 2.4.16 når $n = -5$? Hva er m i dette tilfellet? Gå gjennom beviset for Proposisjon 2.4.2 ved å erstatte n med -5. Hvilket at utsagnene (1) og (2) stemmer? Hva er k i dette tilfellet?