Forelesning 11 — mandag den 22. september

2.9 Lineære diofantiske ligninger – forts.

Proposisjon 2.9.1. La a, b, c, x, og y være heltall. Anta at

$$ax + by = c.$$

La d være et naturlig tall slik at $\mathsf{sfd}(a, b) = d$. Ut ifra definisjonen til $\mathsf{sfd}(a, b)$ vet vi at $d \mid a$ og $d \mid b$, altså at det finnes heltall k_a slik at $a = k_a d$, og at det finnes et heltall k_b slik at $b = k_b d$. La x' og y' være heltall slik at

$$ax' + by' = c.$$

Da finnes det et heltall t slik at

$$x' = x + k_b t$$

og

$$y' = y - k_a t.$$

Bevis. Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Siden

$$ax + by = c$$

og

$$ax' + by' = c,$$

er

$$ax + by = ax' + by'.$$

Derfor er

$$by - by' = ax' - ax,$$

altså er

$$b(y - y') = a(x' - x).$$

(2) Siden $a = k_a d$ og $b = k_b d$, følger det fra (1) at

$$(k_b d)(y - y') = (k_a d)(x' - x),$$

altså at

$$d\big(k_b(y - y')\big) = d\big(k_a(x' - x)\big).$$

(3) Det følger fra (2) og Proposisjon 2.2.25 at

$$k_b(y - y') = k_a(x' - x).$$

Dermed er $k_a \mid k_b(y - y')$.

(4) Ut ifra Proposisjon 2.8.13 er $\mathsf{sfd}(k_a, k_b) = 1$.

(5) Det følger fra (3), (4), og Proposisjon 2.8.22 at $k_a \mid y - y'$. Dermed finnes det et heltall t slik at $y - y' = tk_a$.

(6) Det følger fra (3) og (5) at

$$k_a(x' - x) = k_b t k_a,$$

altså

$$k_a(x' - x) = k_a k_b t.$$

(7) Det følger fra (6) og Proposisjon 2.2.25 at $x' - x = k_b t$.

Fra (5) og (7) deduserer vi at

$$x' = x + tk_b$$

og

$$y' = y - tk_a.$$

□

Eksempel 2.9.2. Vi har: $x = 5$ og $y = 3$ er en løsning til ligningen

$$4x - 6y = 2.$$

I tillegg er

$$\mathsf{sfd}(4, -6) = 2.$$

Siden $4 = 2 \cdot 2$, er $k_a = 2$. Siden $-6 = (-3) \cdot 2$, er $k_b = -3$. La x' og y' være heltall slik at

$$4x' - 6y' = 2.$$

Proposisjon 2.9.1 fastsår at det finnes et heltall t slik at $x' = 5 + (-3)t$ og $y' = 3 - 2t$, altså $x' = 5 - 3t$ og $y' = 3 - 2t$.

For eksempel er $x = 68$ og $y = 45$ en løsning til ligningen

$$4x - 6y = 2.$$

Ved å la $t = 21$, er det rikignok sant at $x = 5 - 3t$ og $y = 3 - 2t$.

Eksempel 2.9.3. Vi har: $x = -2$ og $y = 1$ er en løsning til ligningen

$$-9x - 6y = 12.$$

I tillegg er

$$\mathsf{sfd}(-9, -6) = 3.$$

Siden $-9 = (-3) \cdot 3$, er $k_a = -3$. Siden $-6 = (-2) \cdot 3$, er $k_b = -2$. La x' og y' være heltall slik at

$$-9x' - 6y' = 12.$$

Proposisjon 2.9.1 fastsår at det finnes et heltall t slik at $x' = -2+(-2)t$ og $y' = 1-(-3)t$, altså $x' = -2 - 2t$ og $y' = 1 + 3t$.

For eksempel er $x = 30$ og $y = -47$ en løsning til ligningen

$$-9x - 6y = 12.$$

Ved å la $t = -15$, er det rikignok sant at $x = -2 - 2t$ og $y = 1 + 3t$.

Korollar 2.9.4. La a, b, c være heltall. La d være et naturlig tall slik at $\mathsf{sfd}(a, b) = d$. Fra Korollar 2.7.20 vet vi at det finnes heltall u og v slik at $d = ua + vb$. Ut ifra definisjonen til $\mathsf{sfd}(a, b)$ vet vi at $d \mid a$ og $d \mid b$, altså at det finnes heltall k_a slik at $a = k_a d$, og at det finnes et heltall k_b slik at $b = k_b d$. Anta at $d \mid c$, altså at det et heltall k slik at $c = kd$. La x og y være heltall slik at

$$ax + by = c.$$

Da finnes det et heltall t slik at

$$x = ku + k_b t$$

og

$$y = kv - k_a t.$$

Bevis. Ut ifra Proposisjon 2.9.4 er

$$a(ku) + b(kv) = c.$$

Dermed følger utsagnet umiddelbart fra Proposisjon 2.9.1. □

Eksempel 2.9.5. La oss se på ligningen

$$63x + 49y = 252.$$

Som i Eksempel 2.9.6, har vi

(1) $\mathsf{sfd}(63, 49) = 7$;

(2) $7 = (-3) \cdot 63 + 4 \cdot 49$.

Siden $252 = 36 \cdot 7$, har vi i tillegg: $7 \mid 252$ og $k = 36$. Siden $63 = 9 \cdot 7$, er $k_a = 9$. Siden $49 = 7 \cdot 7$, er $k_b = 7$. Dersom x og y er heltall slik at

$$63x + 49y = 252,$$

fastslår Korollar 2.9.4 at det finnes et heltall t slik at $x = 36 \cdot (-3) + 7t$ og $y = 36 \cdot 4 - 9t$, altså $x = -108 + 7t$ og $y = 144 - 9t$.

For eksempel er $x = 39$ og $y = -45$ en løsning til ligningen. Ved å la $t = 21$, er det riktignok sant at $x = -108 + 7t$ og $y = 144 - 9t$.

Eksempel 2.9.6. La oss se på ligningen

$$286x + 455y = -429.$$

Som i Eksempel 2.9.7, har vi

(1) $\mathsf{sfd}(286, 455) = 13$;

(2) $13 = 8 \cdot 286 + (-5) \cdot 455$.

Siden

$$-429 = (-33) \cdot 13,$$

har vi i tillegg: $13 \mid -429$ og $k = -33$.. Siden $286 = 22 \cdot 13$, er $k_a = 13$. Siden $455 = 35 \cdot 13$, er $k_b = 35$. Dersom x og y er heltall slik at

$$286x + 455y = -429,$$

fastslår Korollar 2.9.4 at det finnes et heltall t slik at $x = (-33) \cdot 8 + 35t$ og $y = (-33) \cdot (-5) - 22t$, altså $x = -264 + 35t$ og $y = 165 - 22t$.

For eksempel er $x = 366$ og $y = -231$ en løsning til ligningen. Ved å la $t = 18$, er det riktignok sant at $x = -264 + 35t$ og $y = 165 - 22t$.

Eksempel 2.9.7. La oss se på ligningen

$$-24x + 136y = 1072.$$

Ved å benytte Euklids algoritme og algoritmen i Merknad 2.7.15, får vi:

(1) $\mathsf{sfd}(-24, 136) = 8$;

(2) $8 = (-6) \cdot (-24) + (-1) \cdot 136$.

Siden $1072 = 134 \cdot 8$, har vi i tillegg: $8 \mid 1072$ og $k = 134$. Dersom x og y er heltall slik at

$$-24x + 136y = 1072,$$

fastslår Korollar 2.9.4 at det finnes et heltall t slik at $x = 134 \cdot (-6) + 17t$ og $y = 134 \cdot (-1) + 3t$, altså $x = -804 + 17t$ og $y = -134 + 3t$.

For eksempel er $x = -1025$ og $y = -173$ en løsning til ligningen. Ved å la $t = -13$, er det riktignok sant at $x = -804 + 17t$ og $y = -134 + 3t$.

Proposisjon 2.9.8. La a, b, c, x, og y være heltall. Anta at

$$ax + by = c.$$

La d være et naturlig tall slik at $\mathsf{sfd}(a, b) = d$. Ut ifra definisjonen til $\mathsf{sfd}(a, b)$ vet vi at $d \mid a$ og $d \mid b$, altså at det finnes heltall k_a slik at $a = k_a d$, og at det finnes et heltall k_b slik at $b = k_b d$. For hvert heltall t, er da

$$x' = x + k_b t$$

og

$$y' = y - k_a t$$

en løsning til ligningen

$$ax' + by' = c.$$

Bevis. Vi regner som følger:

$$\begin{aligned}
ax' + by' &= a(x + k_b t) + b(y - k_a t) \\
&= ax + by + ak_b t - bk_a t \\
&= ax + by + (ak_b - bk_a)t \\
&= ax + by + \big((k_a d)k_b - (k_b d)k_a\big)t \\
&= ax + by + (k_a k_b d - k_a k_b d)t \\
&= ax + by + 0 \cdot t \\
&= ax + by \\
&= c
\end{aligned}$$

□

Eksempel 2.9.9. Som i Eksempel 2.9.2, har vi:

(1) $x = 5$ og $y = 3$ er en løsning til ligningen

$$4x - 6y = 2;$$

(2) $\mathsf{sfd}(4, -6) = 2$;

(3) $k_a = 2$ og $k_b = -3$.

For hvert heltall t, fastslår Proposisjon 2.9.8 at $x = 5 - 3t$ og $y = 3 - 2t$ er en løsning til ligningen

$$63x + 49y = 252.$$

For eksempel er $x = 5 - 3 \cdot 68$ og $y = 3 - 2 \cdot 68$, altså $x = -199$ og $y = -133$, en løsning til ligningen.

Korollar 2.9.10. La a, b, c være heltall. La d være et naturlig tall slik at $\mathsf{sfd}(a,b) = d$. Fra Korollar 2.7.20 vet vi at det finnes heltall u og v slik at $d = ua + vb$. Ut ifra definisjonen til $\mathsf{sfd}(a,b)$ vet vi at $d \mid a$ og $d \mid b$, altså at det finnes heltall k_a slik at $a = k_a d$, og at det finnes et heltall k_b slik at $b = k_b d$. Anta at $d \mid c$, altså at det et heltall k slik at $c = kd$. For hvert heltall t, er da

$$x = ku + k_b t$$

og

$$y = kv - k_a t$$

en løsning til ligningen

$$ax + by = c.$$

Bevis. Ut ifra Proposisjon 2.9.4 er

$$aku + bkv = c.$$

Dermed følger utsagnet umiddelbart fra Proposisjon 2.9.8. □

Eksempel 2.9.11. La oss se på ligingen

$$63x + 49y = 252.$$

Som i Eksempel 2.9.6, har vi:

(1) $\mathsf{sfd}(63, 49) = 7$;

(2) $x = -3$ og $y = 4$ er en løsning til ligningen

$$63x + 49y = 7;$$

(3) $k = 36$;

(4) $k_a = 9$ og $k_b = 7$.

For hvert heltall t, fastslår Korollar 2.9.10 at $x = 36 \cdot (-3) + 7t$ og $y = 36 \cdot 4 + 9t$, altså $x = -108 + 7t$ og $y = 144 - 9t$, er en løsning til ligningen

$$63x + 49y = 252.$$

For eksempel er $x = -108 + 7 \cdot 51$ og $y = 144 - 9 \cdot 51$, altså $x = 249$ og $y = -315$, en løsning til ligningen.

Korollar 2.9.12. La a, b, c, x, og y være heltall. Anta at

$$ax + by = c.$$

La d være et naturlig tall slik at $\mathsf{sfd}(a, b) = d$. Ut ifra definisjonen til $\mathsf{sfd}(a, b)$ vet vi at $d \mid a$ og $d \mid b$, altså at det finnes heltall k_a slik at $a = k_a d$, og at det finnes et heltall k_b slik at $b = k_b d$. Da er heltall x' og y' en løsning til ligningen

$$ax' + by' = c$$

hvis og bare hvis det finnes et heltall t slik at

$$x' = x + k_b t$$

og

$$y' = y - k_a t.$$

Bevis. Følger umiddelbart fra Proposisjon 2.9.1 og Proposisjon 2.9.8. □

Korollar 2.9.13. La a, b, c være heltall. La d være et naturlig tall slik at $\mathsf{sfd}(a, b) = d$. Fra Korollar 2.7.20 vet vi at det finnes heltall u og v slik at $d = ua + vb$. Ut ifra definisjonen til $\mathsf{sfd}(a, b)$ vet vi at $d \mid a$ og $d \mid b$, altså at det finnes heltall k_a slik at $a = k_a d$, og at det finnes et heltall k_b slik at $b = k_b d$. Anta at $d \mid c$, altså at det et heltall k slik at $c = kd$. Da er heltall x og y en løsning til ligningen

$$ax + by = c$$

hvis og bare hvis det finnes et heltall t slik at

$$x = ku + k_b t$$

og

$$y = kv - k_a t.$$

Bevis. Følger umiddelbart fra Korollar 2.9.4 og Korollar 2.9.10. □

Merknad 2.9.14. Ved å ha gitt et bevis for Korollar 2.9.13, har vi rukket en komplett forståelse for løsningene til en hvilken som helst lineær diofantisk ligning.

Oppgaver

O2.1 Oppgaver i eksamens stil

Oppgave O2.1.12. Finn alle heltall løsningene til de følgende ligningene.

(1) $-371x + 28y = 119$.

(2) $15x - 33y = 28$.

(3) $1026x + 441y = -135$.