MA1301 Tallteori — Høsten 2014

Richard Williamson

3. desember 2014

Innhold

Forord **5**

1 Induksjon og rekursjon **7**
1.1 Naturlige tall og heltall 7
1.2 Bevis 7
1.3 Teoremer, proposisjoner, lemmaer, og korollarer 8
1.4 Induksjon 8
1.5 Flere eksempler på bevis ved induksjon 12
1.6 Summetegnet 16
1.7 Et eksempel til på bevis ved induksjon 19
1.8 Fakultet 23
1.9 Binomialkoeffisienter og binomialteoremet 23
1.10 Rekursjon 34
1.11 Fibonaccitall 36
1.12 Binets formel for Fibonaccitallene 40
1.13 Varianter av induksjon 48
1.14 Litt mer om Fibonaccitallene 54

O1 Oppgaver – induksjon og rekursjon **61**
O1.1 Oppgaver i eksamens stil 61
O1.2 Oppgaver for å hjelpe med å forstå kapittelet 64

Forord

Pensumet

Disse notatene er pensumet for årets kurs. De er basert på tekstboka «Elementary number theory» av David M Burton, men er ofte ganske ulike. Når notatene skiller seg fra boka, er det notatene og ikke boka som bør følges.

Det er ingen plikt til å bruke tekstboka. Notatene har blitt skrevet i den hensikt at de skal være lett å lese og lære fra. Det kan være bedre å følge en fremstilling enn to[1].

Lenker til informasjon om de historiske skikkelsene som skapte tallteori kommer til å bli lagt ut på kursets hjemmeside. Disse vil dekke de fleste historiske notatene i tekstboka, men les gjerne dem også.

Guide

Notatene følger en struktur hvor diskusjon og utdypninger er skilt fra formelle definisjoner, proposisjoner, og andre typer påstander. For hver proposisjon eller annen type påstand, brukes alltid følgende mønster:

(1) Proposisjonen gis først;

(2) Etterfulgt av dens bevis;

(3) Eksempler på det som proposisjonen og dens bevis fastslår kommer så. Av og til er det i tillegg merknader til beviset eller proposisjonen.

Det kan være lurt å lese eksemplene rett etter å ha lest proposisjonen, og så gå tilbake og lese beviset. På denne måten blir proposisjonen litt mer konkret.

Det tar litt tid å bli fortrolig med den abstrakte og konsise måten matematikk skrives på. Ikke gi deg: det kommer etter hvert!

Oppgavene

Etter kapitlene finnes oppgaver, som er delt inn i to.

(1) *Oppgaver i eksamens still* er «vanlige matematiske oppgaver»: de gir deg muligheten til å øve deg på å bruke teorien som ble introdusert i kapittelet, og dermed å vurdere din forståelse av kapittelets innhold.

[1] Likevel er det obligatorisk å ha en kopi av tekstboka! Siden jeg skriver notatene i år og bruker dem for første gang, kan det være greit å ha tekstboka som et sikkerhetsnett.

(2) *Oppgaver for å hjelpe med å forstå kapittelet* tar for seg teorien som ble introdusert i kapittelet. Noen ganger ser bevis og definisjoner litt avskrekkende ut til å begynne med: kanskje ser de litt for abstrakte ut, eller de benytter seg av notasjoner som man ikke føler seg fortrolig med. Målet med disse oppgavene er å hjelpe deg å få en god forståelse. Hvis du synes noe i kapittelet er vanskelig, se på oppgavene, og prøv å gjøre de som handler om det du sliter med.

Takk

Jeg takker den vidunderlige kona mi, Kari, så mye for all hjelpen med norsken. Jeg takker også Magnus Bakke Botnan, Truls Bakkejord Ræder, Gard Spreemann, og Marius Thaule for hjelpen med norsken, spesielt med «matematisk norsk».

Fremfor alt takker jeg Kari og lille Åsmund for å ha gjort dagene da disse notatene ble skrevet så lykkelige, fylt av latter, sang, og de gledelige smilene som bare en baby gir!

1 Induksjon og rekursjon

1.1 Naturlige tall og heltall

Definisjon 1.1.1. Et *naturlig tall* er et av tallene: 1, 2, ...

Merknad 1.1.2. Legg spesielt merke til at i dette kurset teller vi ikke 0 iblant de naturlige tallene. Allikevel er det noen som ser på 0 som et naturlig tall. Å inkludere det eller ikke er bare en konvensjon, og ikke noe å bekymre seg for. Noen ganger inkluderer jeg selv det, og noen ganger ikke!

Definisjon 1.1.3. Et *heltall* er et av tallene: $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$.

Merknad 1.1.4. Alle naturlige tall er heltall. Men ikke alle heltall er naturlige tall: de negative heltallene er ikke naturlige tall. Ifølge Definisjon 1.1.1 er 0 heller ikke et naturlig tall.

Notasjon 1.1.5. La m og n være heltall. Vi skriver m ganger n som mn, $m \cdot n$, eller $m \times n$.

1.2 Bevis

Merknad 1.2.1. Matematikk er som et gigantisk byggverk i murstein. Det bygges opp på følgende måte.

(1) Matematiske påstander formuleres. Disse er mursteinene til byggverket.

(2) Disse påstandene bevises, ved hjelp av matematiske påstander som allerede har blitt bevist. Bevisene er sementen som binder mursteinene sammen.

Terminologi 1.2.2. Å *bevise* at en matematisk påstand er sann betyr å vise, ved å benytte gitte logiske prinsipper, at den er sann fra påstander som allerede har blitt bevist, og fra definisjonene av tingene påstanden handler om. Typisk blir et bevis bygd opp steg for steg i en rekke deduksjoner.

Eksempel 1.2.3. La n være et naturlig tall. Et eksempel på en matematisk påstand er:

$$n + 4 > n + 3.$$

At denne påstanden er sann følger logisk fra de følgende to påstandene:

(1) $4 > 3$.

(2) For hvilke som helst naturlige tall n, k, og l slik at $k > l$, er $n + k > n + l$.

Logikken er som følger: siden $4 > 3$ kan vi ta k som 4 og l som 3 i Påstand (2), og da får vi at $n + 4 > n + 3$, som vi ønsket å bevise.

Merknad 1.2.4. Hele kurset består av matematiske påstander og deres beviser, så vi ikke skal gi flere eksempler nå. De logiske prinsippene som står bak dem er stort sett så velkjente at vi ikke pleier å nevne dem. Imidlertid skal vi i dette kapittelet introdusere et logisk prinsipp som er svært viktig i matematikk, og som du sannsynligvis ikke kjenner til: «induksjon».

Merknad 1.2.5. Å bevise at en matematisk påstand er gal betyr helt enkelt å gi et eksempel hvor det ikke er sant. For eksempel se på påstanden: dersom n er et naturlig tall, er $2n > n + 1$. Denne påstanden er gal: når $n = 1$, er påstanden at $2 > 2$, noe som er galt.

Imidlertid er følgende påstand sann: dersom n er et naturlig tall slik at $n \geq 2$, er $2n > n + 1$. Den kan bevises ved hjelp av induksjon. Dette illustrerer hvor viktig det er at en matematisk påstand uttrykkes nøyaktig.

Terminologi 1.2.6. Et eksempel som beviser at en matematisk påstand er gal kalles noen ganger et *moteksempel*. Det tilsvarende engelske ordet er: «counterexample».

1.3 Teoremer, proposisjoner, lemmaer, og korollarer

Terminologi 1.3.1. Et matematisk utsagn som har blitt bevist kalles et *teorem*, en *proposisjon*, et *korollar*, eller et *lemma*. Forskjellige matematikere bruker disse betegnelsene på forskjellige måter, og noen bruker i tillegg andre betegnelser. Likevel finnes det noen hovedtrekk som går igjen.

(1) Et lemma betegner typisk et steg mot et teorem eller en proposisjon som i seg selv ikke er spesielt viktig. Ofte kan et lemma bevises ganske lett, men ikke alltid!

(2) Et teorem eller en proposisjon er et utsagn som er betydningsfult i seg selv. Et teorem er viktigere enn en proposisjon. Personlig bruker jeg «teorem» bare for de aller viktigste utsagnene.

(3) Et korollar betegner typisk et utsagn som er lett å dedusere fra et allerede bevist teorem, proposisjon, eller lemma.

1.4 Induksjon

Merknad 1.4.1. La n være et naturlig tall. Se på påstanden

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Hvordan kan vi bevise at dette er sant?

Vi kan sjekke om det er sant for gitte verdier av n. La for eksempel $n = 1$. Siden

$$\frac{1 \cdot (1+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

er utsagnet sant i dette tilfellet.

La $n = 2$ istedenfor. Siden $1 + 2 = 3$ og

$$\frac{2 \cdot (2+1)}{2} = \frac{2 \cdot 3}{2} = \frac{6}{2} = 3,$$

er det sant at

$$1 + 2 = \frac{2 \cdot (2+1)}{2}.$$

Dermed er utsagnet sant i dette tilfellet også. Vi kan på en lignende måte sjekke om utsagnet er sant når $n = 3$, når $n = 4$, og så videre.

Likevel kan vi ikke sjekke om proposisjonen er sann for alle naturlig tall selv om vi brukte hele livet på kun det! Derfor regnes ikke å sjekke om det er sant i for enkelte verdier av n som et matematisk bevis.

Istedenfor benytter vi en type resonnement som kalles induksjon.

Terminologi 1.4.2. Anta at vi har et gitt matematisk utsagn for hvert heltall større enn eller likt et gitt heltall r. Anta dessuten at vi ønsker å bevise utsagnet for hvert av disse heltallene. *Induksjon* sier at vi kan gjøre det på følgende måte:

(1) Sjekk om utsagnet er sant for heltallet r.

(2) Hvis det antas at utsagnet har blitt bevist for et gitt heltall m som er større enn eller likt r, bevis at utsagnet er sant for heltallet $m + 1$.

Merknad 1.4.3. Idéen bak induksjon er at Steg (1) og Steg (2) gir oss en algoritme for å konstruere et bevis for utsagnet for et hvilket som helst heltall m større enn eller likt r:

(i) Steg (1) i Terminologi 1.4.2 fastslår at vi kan bevise utsagnet når $m = r$;

(ii) Steg (2) i Terminologi 1.4.2 fastslår at vi da kan bevise utsagnet når $m = r + 1$;

(iii) Steg (2) i Terminologi 1.4.2 fastslår at vi *da* kan bevise utsagnet når $m = r + 2$;

(iv) Steg (2) i Terminologi 1.4.2 fastslår at vi *da* kan bevise utsagnet når $m = r + 3$;

(v) Slik fortsetter vi til vi når heltallet vi er interessert i.

Merknad 1.4.4. Det er svært viktig å fremstille et bevis ved induksjon på en klar måte:

(1) Skriv tydelig at vi sjekker utsagnet for et gitt heltall r, for å gjennomføre Steg (1) i Terminologi 1.4.2.

(2) Skriv tydelig at vi antar at utsagnet har blitt bevist for et gitt heltall m større enn r. Skriv så et bevis for utsagnet for heltallet $m+1$, og redegjør for hvor du benytter antagelsen at utsagnet stemmer for heltallet m. Dermed har Steg (2) i Terminologi 1.4.2 blitt fullført.

(3) Avslutt fremstillingen ved å nevne at utsagnet stemmer for alle heltall større enn r ved induksjon. Det er også greit å begynne med å skrive at utsagnet skal bevises ved induksjon. Det viktigste er å nevne dette et eller annet sted.

Vi skal se på mange bevis ved induksjon i løpet av dette kurset, og du kommer sikkert til å bli fortrolig med det. La oss begynne med en gang ved å uttrykke formelt påstanden som vi tok for oss i Merknad 1.4.1, og å fremstille et bevis for det ved induksjon.

Proposisjon 1.4.5. La n være et naturlig tall. Da er

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Bevis. Først sjekker vi om proposisjonen er sann når $n = 1$. Dette gjorde vi i Merknad 1.4.1.

Anta nå at proposisjonen har blitt bevist for et gitt naturlig tall m større enn eller likt 1. Således har det blitt bevist at

$$1 + 2 + \cdots + m = \frac{m(m+1)}{2}.$$

Da er

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + m + (m+1) &= \frac{m(m+1)}{2} + (m+1) \\ &= \frac{m(m+1) + 2(m+1)}{2} \\ &= \frac{(m+2)(m+1)}{2} \\ &= \frac{(m+1)(m+2)}{2}. \end{aligned}$$

Dermed er proposisjonen sann for det naturlige tallet $m+1$.

Ved induksjon konkluderer vi at proposisjonen er sann for alle naturlige tall. □

Eksempel 1.4.6. Når $n = 2$, fastslår Proposisjon 1.4.5 at

$$1 + 2 = \frac{2 \cdot 3}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

Eksempel 1.4.7. Når $n = 3$, fastslår Proposisjon 1.4.5 at

$$1 + 2 + 3 = \frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{12}{2} = 6.$$

Eksempel 1.4.8. Når $n = 57$, fastslår Proposisjon 1.4.5 at

$$1 + 2 + \cdots + 57 = \frac{57 \cdot 58}{2} = \frac{3306}{2} = 1653.$$

Eksempel 1.4.9. Når $n = 100$, fastslår Proposisjon 1.4.5 at

$$1 + 2 + \cdots + 100 = \frac{100 \cdot 101}{2} = \frac{10100}{2} = 5050.$$

Merknad 1.4.10. Den viktigste delen av beviset for Proposisjon 1.4.5 er ligningen

$$1 + 2 + \cdots + m + (m+1) = \frac{m(m+1)}{2} + (m+1).$$

Det er her vi benytter antakelsen at

$$1 + 2 + \cdots + m = \frac{m(m+1)}{2}.$$

De andre linjene er bare algebraiske manipulasjoner.

Merknad 1.4.11. La oss se hvordan algoritmen i Merknad 1.4.3 ser ut for Proposisjon 1.4.5. Vi begynner med å sjekke om

$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2}.$$

Så argumenterer vi som i beviset for Proposisjon 1.4.5, ved å erstatte m med 1:

$$\begin{aligned} 1 + 2 &= \frac{1 \cdot 2}{2} + 2 \\ &= \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 2}{2} \\ &= \frac{(1+2) \cdot 2}{2} \\ &= \frac{2 \cdot (1+2)}{2} \\ &= \frac{2 \cdot 3}{2}. \end{aligned}$$

Dermed er

$$1 + 2 = \frac{2 \cdot 3}{2}.$$

Således har vi bevist at proposisjonen er sann når $n = 2$.

Så argumenterer vi som i beviset for Proposisjon 1.4.5, ved å erstatte m med 2:

$$\begin{aligned}1+2+3 &= \frac{2\cdot 3}{2}+3\\ &= \frac{2\cdot 3+2\cdot 3}{2}\\ &= \frac{(2+2)\cdot 3}{2}\\ &= \frac{3\cdot(2+2)}{2}\\ &= \frac{3\cdot 4}{2}.\end{aligned}$$

Dermed er

$$1+2+3 = \frac{3\cdot 4}{2}.$$

Således har vi bevist at proposisjonen er sann når $n = 3$.

Slik fortsetter vi til vi når heltallet vi er interessert i.

Merknad 1.4.12. Proposisjon 1.4.5 kan bevises på andre måter. Matematiske utsagn generelt kan typisk bevises på flere måter, og alle bevisene er like verdifulle. Ofte gir hvert bevis ny innsikt.

Likevel skal vi ikke her se på andre bevis for Proposisjon 1.4.5. Istedenfor skal vi øve oss litt mer på induksjon.

1.5 Flere eksempler på bevis ved induksjon

Proposisjon 1.5.1. La n være et naturlig tall. Da er

$$1+2+4+\cdots+2^{n-1} = 2^n - 1.$$

Bevis. Først sjekker vi om proposisjonen er sann når $n = 1$. I dette tilfellet er utsagnet at $1 = 2^1 - 1$. Siden

$$2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$$

er dette sant.

Anta nå at proposisjonen har blitt bevist for et gitt heltall m større enn eller likt 1. Således har det blitt bevist at

$$1+2+4+\cdots+2^{m-1} = 2^m - 1.$$

Da er

$$\begin{aligned}1+2+4+\cdots+2^{m-1}+2^m &= (2^m-1)+2^m\\ &= (2^m+2^m)-1\\ &= (2\cdot 2^m)-1\\ &= 2^{m+1}-1.\end{aligned}$$

Dermed er proposisjonen sann for det naturlige tallet $m+1$.

Ved induksjon konkluderer vi at proposisjonen er sann for alle naturlige tall. $\square$

Eksempel 1.5.2. Når $n = 2$, fastslår Proposisjon 1.5.1 at

$$1 + 2 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3.$$

Eksempel 1.5.3. Når $n = 3$, fastslår Proposisjon 1.5.1 at

$$1 + 2 + 4 = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7.$$

Eksempel 1.5.4. Når $n = 6$, fastslår Proposisjon 1.5.1 at

$$1 + 2 + \cdots + 32 = 2^6 - 1 = 64 - 1 = 63.$$

Eksempel 1.5.5. Når $n = 57$, fastslår Proposisjon 1.5.1 at

$$1 + 2 + \cdots + 2^{56} = 2^{57} - 1 = 144115188075855872 - 1 = 144115188075855871.$$

Merknad 1.5.6. Den viktigste delen av beviset for Proposisjon 1.5.1 er ligningen

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{m-1} + 2^m = (2^m - 1) + 2^m.$$

Det er her vi benytter antakelsen at

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{m-1} = 2^m - 1.$$

De andre linjene er bare algebraiske manipulasjoner.

Proposisjon 1.5.7. La n være et naturlig tall. Da er

$$1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Bevis. Først sjekker vi om proposisjonen er sann når $n = 1$. I dette tilfellet er utsagnet at

$$1 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot \big((2 \cdot 1) + 1\big)}{6}.$$

Siden

$$\frac{1 \cdot (1+1) \cdot \big((2 \cdot 1) + 1\big)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

er dette sant.

Anta nå at proposisjonen har blitt bevist for et gitt heltall m større enn eller likt 1. Således har det blitt bevist at

$$1 + 4 + 9 + \cdots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

Da er

$$\begin{aligned}
1+4+9+\cdots+m^2+(m+1)^2 &= \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}+(m+1)^2 \\
&= \frac{m(m+1)(2m+1)+6(m+1)^2}{6} \\
&= \frac{(m+1)\cdot\big(m(2m+1)+6(m+1)\big)}{6} \\
&= \frac{(m+1)\cdot\big(2m^2+7m+6\big)}{6} \\
&= \frac{(m+1)\cdot\big((m+2)\cdot(2m+3)\big)}{6} \\
&= \frac{(m+1)\cdot\big((m+1)+1\big)\cdot\big(2(m+1)+1\big)}{6}.
\end{aligned}$$

Dermed er proposisjonen sann for det naturlige tallet $m+1$.

Ved induksjon konkluderer vi at proposisjonen er sann for alle naturlige tall. □

Eksempel 1.5.8. Når $n = 2$, fastslår Proposisjon 1.5.7 at

$$1+4 = \frac{2\cdot3\cdot5}{2} = \frac{30}{6} = 5.$$

Eksempel 1.5.9. Når $n = 3$, fastslår Proposisjon 1.5.7 at

$$1+4+9 = \frac{3\cdot4\cdot7}{6} = \frac{84}{6} = 14.$$

Eksempel 1.5.10. Når $n = 6$, fastslår Proposisjon 1.5.7 at

$$1+4+\cdots+36 = \frac{6\cdot7\cdot13}{6} = \frac{546}{6} = 91.$$

Eksempel 1.5.11. Når $n = 57$, fastslår Proposisjon 1.5.7 at

$$1+4+\cdots+3249 = \frac{57\cdot58\cdot115}{6} = \frac{380190}{6} = 63365.$$

Merknad 1.5.12. Den viktigste delen av beviset for Proposisjon 1.5.7 er ligningen

$$1+4+9+\cdots+m^2+(m+1)^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}+(m+1)^2.$$

Det er her vi benytter antakelsen at

$$1+4+9+\cdots+m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

De andre linjene er bare algebraiske manipulasjoner.

Merknad 1.5.13. Alle proposisjonene vi har sett så langt er sanne for alle naturlige tall, altså alle heltall større enn eller like 1. Derfor begynte bevisene ved induksjon for alle disse proposisjonene med å sjekke om utsagnene er sanne når $n = 1$.

Neste skal vi bevise ved induksjon en proposisjon som er sann for alle naturlige tall større enn eller like 2. Derfor skal vi begynne beviset med å sjekke om proposisjonen er sann når $n = 2$.

Husk at induksjon kan brukes for å bevise en proposisjon for alle naturlige tall større enn eller like et hvilket som helst gitt heltall.

Proposisjon 1.5.14. La n være et naturlig tall som er større enn eller likt 2. Da er $n^2 > n + 1$.

Bevis. Først sjekker vi om proposisjonen er sann når $n = 2$. I dette tilfellet er utsagnet at

$$2^2 > 2 + 1.$$

Siden $2^2 = 4$ og $2 + 1 = 3$, er dette sant.

Anta nå at proposisjonen har blitt bevist for et gitt heltall m større enn eller likt 2. Således har det blitt bevist at

$$m^2 > m + 1.$$

Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Vi har:

$$\begin{aligned}(m+1)^2 &= (m+1) \cdot (m+1) \\ &= m^2 + 2m + 1.\end{aligned}$$

(2) Siden $m > 0$, er $2m > 0$. Derfor er

$$m^2 + 2m + 1 > m^2 + 1.$$

(3) Fra antakelsen at

$$m^2 > m + 1,$$

følger det at

$$m^2 + 1 > (m + 1) + 1.$$

Fra (1) – (3) deduserer vi at

$$(m + 1)^2 > (m + 1) + 1.$$

Således er proposisjonen sann for det naturlige tallet $m + 1$.

Ved induksjon konkluderer vi at proposisjonen er sann for alle naturlige tall større enn eller like 2. $\square$

Eksempel 1.5.15. Når $n = 3$, fastslår Proposisjon 1.5.14 at

$$9 > 4.$$

Eksempel 1.5.16. Når $n = 4$, fastslår Proposisjon 1.5.14 at

$$16 > 5.$$

Eksempel 1.5.17. Når $n = 57$, fastslår Proposisjon 1.5.14 at

$$3249 > 58.$$

Merknad 1.5.18. Observasjon (3), hvor vi benytter antakelsen at

$$m^2 > m + 1,$$

er den viktigste delen av beviset for Proposisjon 1.5.14.

1.6 Summetegnet

Notasjon 1.6.1. La k og l være heltall. For hvert heltall i slik at $k \leq i \leq l$, la z_i være et heltall. Noen ganger skriver vi summen

$$z_k + z_{k+1} + \cdots + z_l$$

som

$$\sum_{i=k}^{l} z_i.$$

Terminologi 1.6.2. Symbolet $\sum$ kalles *summetegn*.

Eksempel 1.6.3. La n være et naturlig tall. Summen

$$1 + 2 + \cdots + n,$$

som vi tok for oss i Proposisjon 1.4.5, kan skrives

$$\sum_{i=1}^{n} i.$$

Eksempel 1.6.4. La m være et naturlig tall. Summen

$$1 + 2 + \cdots + m,$$

som vi også tok for oss i Proposisjon 1.4.5, kan skrives

$$\sum_{i=1}^{m} i.$$

Eksempel 1.6.5. La m være et naturlig tall. Summen

$$1 + 2 + \cdots + (m + 1),$$

som vi igjen tok for oss i Proposisjon 1.4.5, kan skrives

$$\sum_{i=1}^{m+1} i.$$

Eksempel 1.6.6. La n være et naturlig tall. Summen

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1},$$

som vi tok for oss i Proposisjon 1.5.1, kan skrives

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1}.$$

Den kan også skrives

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2^{i}.$$

Eksempel 1.6.7. La m være et naturlig tall. Summen

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{m-1},$$

som vi også tok for oss i Proposisjon 1.5.1, kan skrives

$$\sum_{i=1}^{m} 2^{i-1}.$$

Den kan også skrives

$$\sum_{i=0}^{m-1} 2^{i}.$$

Eksempel 1.6.8. La m være et naturlig tall. Summen

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{m},$$

som vi igjen tok for oss i Proposisjon 1.5.1, kan skrives

$$\sum_{i=1}^{m+1} 2^{i-1}.$$

Den kan også skrives

$$\sum_{i=0}^{m} 2^{i}.$$

Eksempel 1.6.9. La n være et naturlig tall. Summen

$$1 + 4 + 9 + \cdots + n^2,$$

som vi tok for oss i Proposisjon 1.5.7, kan skrives

$$\sum_{i=1}^{n} i^2.$$

Eksempel 1.6.10. La m være et naturlig tall. Summen

$$1 + 4 + 9 + \cdots + m^2,$$

som vi også tok for oss i Proposisjon 1.5.7, kan skrives

$$\sum_{i=1}^{m} i^2.$$

Eksempel 1.6.11. La m være et naturlig tall. Summen

$$1 + 4 + 9 + \cdots + (m+1)^2,$$

som vi igjen tok for oss i Proposisjon 1.5.7, kan skrives

$$\sum_{i=1}^{m+1} i^2.$$

Eksempel 1.6.12. La n og k være naturlige tall. I den neste delen av kapittelet skal vi jobbe med summer som ligner på

$$\big(1 \times 2 \times \cdots \times k\big) + \big(2 \times 3 \times \cdots \times (k+1)\big) + \cdots + \big(n \times (n+1) \times \cdots \times (n+k-1)\big).$$

Denne summen kan skrives

$$\sum_{i=1}^{n} i \times (i+1) \times \cdots \times (i+k-1).$$

Eksempel 1.6.13. La m og k være naturlige tall. Summen

$$\big(1 \times 2 \times \cdots \times k\big) + \big(2 \times 3 \times \cdots \times (k+1)\big) + \cdots + \big(m \times (m+1) \times \cdots \times (m+k-1)\big)$$

kan skrives

$$\sum_{i=1}^{m} i \times (i+1) \times \cdots \times (i+k-1).$$

Eksempel 1.6.14. La m og k være naturlige tall. Summen

$$\big(1 \times 2 \times \cdots \times k\big) + \big(2 \times 3 \times \cdots \times (k+1)\big) + \cdots + \big((m+1) \times (m+2) \times \cdots \times (m+k)\big)$$

kan skrives

$$\sum_{i=1}^{m+1} i \times (i+1) \times \cdots \times (i+k-1).$$

1.7 Et eksempel til på bevis ved induksjon

Proposisjon 1.7.1. La n og k være naturlige tall. Da er

$$\sum_{i=1}^{n} i \times (i+1) \times \cdots \times (i+k-1) = \frac{n \times (n+1) \times \cdots \times (n+k)}{k+1}.$$

Bevis. Først sjekker vi om proposisjonen er sann når $n = 1$. I dette tilfellet er utsagnet at

$$1 \times 2 \times \cdots \times k = \frac{1 \times (1+1) \times \cdots \times (1+k)}{k+1}.$$

Siden

$$\begin{aligned} \frac{1 \times (1+1) \times \cdots \times (1+k)}{k+1} &= \frac{1 \times 2 \times \cdots \times (k+1)}{k+1} \\ &= 1 \times 2 \times \cdots \times k \end{aligned}$$

er dette sant.

Anta nå at proposisjonen har blitt bevist når n er et gitt naturlig tall m. Således har det blitt bevist at

$$\sum_{i=1}^{m} i \times (i+1) \times \cdots \times (i+k-1) = \frac{m(m+1)\ldots(m+k)}{k+1}.$$

Da er

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m+1} i \times (i+1) \times \cdots \times (i+k-1) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{m} i \times (i+1) \times \cdots \times (i+k-1) \right) + (m+1) \times (m+2) \times \ldots (m+k) \\ &= \frac{m \times (m+1) \times \cdots \times (m+k)}{k+1} + (m+1) \times (m+2) \times \cdots \times (m+k) \\ &= \frac{\big(m \times (m+1) \times \cdots \times (m+k)\big) + \big((k+1) \times (m+1) \times (m+2) \times \cdots \times (m+k)\big)}{k+1} \\ &= \frac{\big((m+1) \times \cdots \times (m+k)\big)\big(m + (k+1)\big)}{k+1} \\ &= \frac{(m+1) \times (m+2) \times \cdots \times (m+k+1)}{k+1}. \end{aligned}$$

Dermed er proposisjonen sann når n er det naturlige tallet $m+1$.

Ved induksjon konkluderer vi at proposisjonen er sann for alle naturlige tall n og alle naturlige tall k. □

Eksempel 1.7.2. Når $n = 2$ og $k = 3$, fastslår Proposisjon 1.7.1 at

$$1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 = \frac{2 \times 3 \times 4 \times 5}{4} = \frac{120}{4} = 30.$$

Eksempel 1.7.3. Når $n = 2$ og $k = 4$, fastslår Proposisjon 1.7.1 at

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 + 2 \times 3 \times 4 \times 5 = \frac{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}{5} = \frac{720}{5} = 144.$$

Eksempel 1.7.4. Når $n = 2$ og $k = 6$, fastslår Proposisjon 1.7.1 at

$$1 \times 2 \times \cdots \times 6 + 2 \times 3 \times \cdots \times 7 = \frac{2 \times 3 \times \ldots 8}{7} = \frac{40320}{7} = 5760.$$

Eksempel 1.7.5. Når $n = 3$ og $k = 2$, fastslår Proposisjon 1.7.1 at

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 = \frac{3 \times 4 \times 5}{3} = \frac{60}{3} = 20.$$

Eksempel 1.7.6. Når $n = 3$ og $k = 3$, fastslår Proposisjon 1.7.1 at

$$1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + 3 \times 4 \times 5 = \frac{3 \times 4 \times 5 \times 6}{4} = \frac{360}{4} = 90.$$

Eksempel 1.7.7. Når $n = 3$ og $k = 6$, fastslår Proposisjon 1.7.1 at

$$\begin{aligned} 1 \times 2 \times \cdots \times 6 + 2 \times 3 \times \cdots \times 7 + 3 \times 4 \times \cdots \times 8 &= \frac{3 \times 4 \times \cdots \times 9}{7} \\ &= \frac{181440}{7} \\ &= 25920. \end{aligned}$$

Eksempel 1.7.8. Når $n = 4$ og $k = 2$, fastslår Proposisjon 1.7.1 at

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 = \frac{4 \times 5 \times 6}{3} = \frac{120}{3} = 40.$$

Eksempel 1.7.9. Når $n = 4$ og $k = 3$, fastslår Proposisjon 1.7.1 at

$$\begin{aligned} 1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + 3 \times 4 \times 5 + 4 \times 5 \times 6 &= \frac{4 \times 5 \times 6 \times 7}{4} \\ &= \frac{840}{4} \\ &= 210. \end{aligned}$$

Eksempel 1.7.10. Når $n = 4$ og $k = 6$, fastslår Proposisjon 1.7.1 at

$$\begin{aligned} 1 \times 2 \times \cdots \times 6 + 2 \times 3 \times \cdots \times 7 + 3 \times 4 \times \cdots \times 8 + 4 \times 5 \times \cdots \times 9 &= \frac{4 \times 5 \times \cdots \times 10}{7} \\ &= \frac{604800}{7} \\ &= 86400. \end{aligned}$$

Eksempel 1.7.11. Når $n = 6$ og $k = 2$, fastslår Proposisjon 1.7.1 at

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + 6 \times 7 = \frac{6 \times 7 \times 8}{3} = \frac{336}{3} = 112.$$

Eksempel 1.7.12. Når $n = 6$ og $k = 3$, fastslår Proposisjon 1.7.1 at

$$\begin{aligned} 1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \cdots + 6 \times 7 \times 8 &= \frac{6 \times 7 \times 8 \times 9}{4} \\ &= \frac{3024}{4} \\ &= 756. \end{aligned}$$

Eksempel 1.7.13. Når $n = 6$ og $k = 6$, fastslår Proposisjon 1.7.1 at

$$\begin{aligned} 1 \times 2 \times \cdots \times 6 + 2 \times 3 \times \cdots \times 7 + \cdots + 6 \times 7 \times \cdots \times 11 &= \frac{6 \times 7 \times \cdots \times 12}{7} \\ &= \frac{3991680}{7} \\ &= 570240. \end{aligned}$$

Merknad 1.7.14. Ligningen

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{i=1}^{m} i \times (i+1) \times \cdots \times (i+k-1) \right) + (m+1) \times (m+2) \times \ldots (m+k) \\ &= \frac{m \times (m+1) \times \cdots \times (m+k)}{k+1} + (m+1) \times (m+2) \times \cdots \times (m+k) \end{aligned}$$

er den viktigste delen av beviset for Proposisjon 1.7.1. Det er her vi benytter antakelsen at

$$\sum_{i=1}^{m} i \times (i+1) \times \cdots \times (i+k-1) = \frac{m \times (m+1) \times \cdots \times (m+k)}{k+1}.$$

Merknad 1.7.15. Proposisjon 1.7.1 for tilfellet $k = 1$ er det samme som Proposisjon 1.4.5. Beviset på Proposisjon 1.7.1 generaliserer beviset for Proposisjon 1.4.5.

Merknad 1.7.16. Proposisjon 1.7.1 gjelder to variabler n og k, og bevis ved induksjon i slike tilfeller kan til å begynne med se litt forvirrende ut. La oss derfor se på logikken bak beviset for Proposisjon 1.7.1.

Da vi sjekket om Proposisjon 1.7.1 er sann når $n = 1$, var k et *hvilket som helst* naturlig tall. Da vi deretter antok at Proposisjon 1.7.1 er sann når n er et gitt naturlig tall m, og viste at den da er sann når $n = m+1$, var k også et *hvilket som helst* naturlig tall.

Dermed kan vi se på beviset for Proposisjon 1.7.1 på følgende måte. Først velger vi et naturlig tall k: la for eksempel k være 5. Da blir utsagnet:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot (i+1) \cdot \cdots \cdot (i+4) = \frac{n(n+1)\cdots(n+5)}{6}.$$

Så beviser vi at dette er sant, ved å erstatte k med 5 i beviset for Proposisjon 1.7.1.

Først sjekker vi om utsagnet er sant når $n = 1$. Vi må altså sjekke om

$$1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 5 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot \cdots \cdot (1+5)}{6}.$$

Siden

$$\begin{aligned}\frac{1 \cdot (1+1) \cdot \cdots \cdot (1+5)}{6} &= \frac{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 6}{6} \\ &= 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 5\end{aligned}$$

er dette sant.

Anta nå at det har blitt beviset at utsagnet er sant når n er et gitt naturlig tall m. Således har det blitt bevist at

$$\sum_{i=1}^{m} i \cdot (i+1) \cdot \cdots \cdot (i+4) = \frac{m(m+1)\cdots(m+5)}{6}.$$

Da er

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m+1} i \cdot (i+1) \cdot \cdots \cdot (i+4) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{m} i \cdot (i+1) \cdot \cdots \cdot (i+4)\right) + (m+1) \cdot (m+2) \cdot \ldots (m+5) \\ &= \frac{m(m+1)\cdots(m+5)}{6} + (m+1) \cdot (m+2) \cdot \cdots \cdot (m+5) \\ &= \frac{m(m+1)\cdots(m+5) + 6 \cdot (m+1) \cdot (m+2) \cdot \cdots \cdot (m+5)}{6} \\ &= \frac{\big((m+1) \cdot \cdots \cdot (m+5)\big)\big(m+6\big)}{6} \\ &= \frac{(m+1) \cdot (m+2) \cdot \cdots \cdot (m+6)}{6}.\end{aligned}$$

Dermed er utsagnet sant når n er det naturlige tallet $m+1$.

Ved induksjon konkluderer vi at utsagnet er sant når n er et hvilket som helst naturlig tall.

Merknad 1.7.17. I prinsippet kan vi bytte om rollene til n og k i beviset for Proposisjon 1.7.1. Det vil si at vi i teorien kan gjøre følgende:

(1) Sjekke om Proposisjon 1.7.1 er sann når $k = 1$, og når n er et hvilket som helst naturlig tall.

(2) Anta så at Proposisjon 1.7.1 er sann når k er et gitt naturlig tall m, og når n er et hvilket som helst naturlig tall, og vis at den da er sann når $k = m + 1$, og når n igjen er et hvilket som helst naturlig tall.

Terminologi 1.7.18. Når vi beviser ved induksjon en proposisjon om heltall som involver to eller flere variabler, spiller alltid én variabel den rollen som n har i beviset for Proposisjon 1.7.1, og som k har i tilnærmingsmetoden beskrevet i Merknad 1.7.17. La oss anta at denne spesielle variabelen betegnes t. Da sier vi at proposisjonen har blitt bevist ved *induksjon på t*.

Eksempel 1.7.19. Vi sier at beviset vi ga for Proposisjon 1.7.1 er ved induksjon på n. Hadde vi et bevis for Proposisjon 1.7.1 med tilnærmingsmetoden beskrevet i Merknad 1.7.17, ville vi si at det er et bevis ved induksjon på k.

Merknad 1.7.20. For å bevise en proposisjon om heltall som involverer to eller flere variabler, er det typisk mye lettere å benytte induksjon på en av variablene enn induksjon på noen av de andre. Det er for eksempel ikke lett å bevise Proposisjon 1.7.1 ved induksjon på k, altså med tilnærmingsmetoden beskrevet i Merknad 1.7.17.

1.8 Fakultet

Definisjon 1.8.1. La n være et naturlig tall. Da er n *fakultet* produktet

$$1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n.$$

I tillegg definerer vi 0 *fakultet* til å være 1.

Notasjon 1.8.2. La n være et heltall slik at $n \geq 0$. Vi betegner n fakultet som ≪$n!$≫.

Eksempel 1.8.3. Vi har: $1! = 1$.

Eksempel 1.8.4. Siden $1 \times 2 = 2$, er $2! = 2$.

Eksempel 1.8.5. Siden $1 \times 2 \times 3 = 6$, er $3! = 6$.

Eksempel 1.8.6. Siden $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$, er $4! = 24$.

1.9 Binomialkoeffisienter og binomialteoremet

Merknad 1.9.1. Fra skolen kjenner du til ligningen

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Nå skal vi se på en tilsvarende ligning for $(x+y)^n$, hvor n er et hvilket som helst naturlig tall. Først må vi gjøre noen forberedelser.

Definisjon 1.9.2. La n være et naturlig tall, og la k være et heltall slik at $0 \leq k \leq n$. Da er *binomialkoeffisienten av n og k* brøken

$$\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Notasjon 1.9.3. Vi betegner binomialkoeffisienten av n og k som

$$\binom{n}{k}.$$

Merknad 1.9.4. Symbolet $\binom{n}{k}$ leses (temmelig ugrammatisk!) som «n velg k». Dette kommer av at det kan bevises at $\binom{n}{k}$ er antall muligheter for å velge ut k ting fra n ting. På grunn av denne tolkningen blir binomialkoeffisientene brukt mye i et område innen matematikken som kalles *kombinatorikk*.

Eksempel 1.9.5. Vi har:

$$\begin{aligned}\binom{4}{2} &= \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} \\ &= \frac{4!}{2! \cdot 2!} \\ &= \frac{24}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{24}{4} \\ &= 6.\end{aligned}$$

Eksempel 1.9.6. Vi har:

$$\begin{aligned}\binom{5}{3} &= \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} \\ &= \frac{5!}{3! \cdot 2!} \\ &= \frac{120}{6 \cdot 2} \\ &= \frac{120}{12} \\ &= 10.\end{aligned}$$

Merknad 1.9.7. Bevisene av de følgende proposisjonene er enkle utregninger, og induksjon behøves ikke.

Proposisjon 1.9.8. La n være et naturlig tall. Da er $\binom{n}{0} = 1$.

Bevis. Vi regner som følger:

$$\begin{aligned}\binom{n}{0} &= \frac{n!}{0! \cdot (n-0)!} \\ &= \frac{n!}{0! \cdot n!} \\ &= \frac{n!}{1 \cdot n!} \\ &= \frac{n!}{n!} \\ &= 1.\end{aligned}$$

□

Proposisjon 1.9.9. La n være et naturlig tall. Da er $\binom{n}{1} = n$.

Bevis. Vi regner som følger:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{1} &= \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} \\
&= \frac{n!}{1 \cdot (n-1)!} \\
&= \frac{n!}{(n-1)!} \\
&= \frac{1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n}{1 \times 2 \times \cdots \times (n-2) \times (n-1)} \\
&= n.
\end{aligned}$$

□

Proposisjon 1.9.10. La n være et naturlig tall, og la k være et heltall slik at $0 \leq k \leq n$. Da er $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Bevis. Vi regner som følger:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \\
&= \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \\
&= \frac{n!}{(n-k)! \cdot \big(n-(n-k)\big)!} \\
&= \binom{n}{n-k}.
\end{aligned}$$

□

Korollar 1.9.11. La n være et naturlig tall. Da er $\binom{n}{n} = 1$.

Bevis. På grunn av Proposisjon 1.9.10 er $\binom{n}{n} = \binom{n}{0}$. På grunn av Proposisjon 1.9.8 er $\binom{n}{0} = 1$. Således konkluderer vi at $\binom{n}{n} = 1$. □

Korollar 1.9.12. La n være et naturlig tall. Da er $\binom{n}{n-1} = n$.

Bevis. Ut ifra Proposisjon 1.9.10 er $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1}$. Ut ifra Proposisjon 1.9.9, er $\binom{n}{1} = n$. Således konkluderer vi at $\binom{n}{n-1} = n$. □

Eksempel 1.9.13. Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Ut ifra Proposisjon 1.9.8 er $\binom{2}{0} = 1$.

(2) Ut ifra Proposisjon 1.9.9 er $\binom{2}{1} = 2$.

(3) Ut ifra Korollar 1.9.11 er $\binom{2}{2} = 1$.

Dermed har vi regnet ut $\binom{2}{k}$ for alle mulige verdier av k.

Eksempel 1.9.14. Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Ut ifra Proposisjon 1.9.8 er $\binom{3}{0} = 1$.

(2) Ut ifra Korollar 1.9.11 er $\binom{3}{3} = 1$.

(3) Ut ifra Proposisjon 1.9.9 er $\binom{3}{1} = 3$.

(4) Fra (3) og Korollar 1.9.12, følger det at $\binom{3}{2} = 3$.

Dermed har vi regnet ut $\binom{3}{k}$ for alle mulige verdier av k.

Eksempel 1.9.15. Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Ut ifra Proposisjon 1.9.8 er $\binom{4}{0} = 1$.

(2) Ut ifra Korollar 1.9.11 er $\binom{4}{4} = 1$.

(3) Ut ifra Proposisjon 1.9.9 er $\binom{4}{1} = 4$.

(4) Fra (3) og Korollar 1.9.12, følger det at $\binom{4}{3} = 4$.

(5) Fra Eksempel 1.9.5 har vi: $\binom{4}{2} = 6$.

Dermed har vi regnet ut $\binom{4}{k}$ for alle mulige verdier av k.

Eksempel 1.9.16. Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Ut ifra Proposisjon 1.9.8 er $\binom{5}{0} = 1$.

(2) Ut ifra Korollar 1.9.11 er $\binom{5}{5} = 1$.

(3) Ut ifra Proposisjon 1.9.9 er $\binom{5}{1} = 5$.

(4) Fra (3) og Korollar 1.9.12, følger det at $\binom{5}{4} = 5$.

(5) Fra Eksempel 1.9.6 har vi: $\binom{5}{3} = 10$.

(6) Fra (5) og Proposisjon 1.9.10, følger det at $\binom{5}{2} = 10$.

Dermed har vi regnet ut $\binom{5}{k}$ for alle mulige verdier av k.

Merknad 1.9.17. I alle eksemplene vi har tatt for oss så langt, var $\binom{n}{k}$ er et naturlig tall. Vi skal snart bevise at dette er tilfelle for hvilke som helst n og k.

Proposisjon 1.9.18. La n og k være naturlige tall. Da er

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Bevis. Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Ut ifra definisjonen av $\binom{n}{k}$ og $\binom{n}{k-1}$ i Definisjon 1.9.2, er

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k+1)!}.$$

(2) Siden $k! = (k-1)! \cdot k$ og $(n-k+1)! = (n-k)! \cdot (n-k+1)$, er

$$\begin{aligned}
\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k+1)!} &= \frac{(n-k+1) \cdot n! + k \cdot n!}{k! \cdot (n-k+1)!} \\
&= \frac{n! \cdot (n-k+1+k)}{k! \cdot (n+1-k)!} \\
&= \frac{n! \cdot (n+1)}{k! \cdot (n+1-k)!}.
\end{aligned}$$

(3) Siden $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$, er

$$\frac{n! \cdot (n+1)}{k! \cdot (n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k! \cdot (n+1-k)!}.$$

(4) Ut ifra definisjonen av $\binom{n+1}{k}$ i Definisjon 1.9.2, er

$$\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{k! \cdot (n+1-k)!}.$$

Fra (1) – (4) konkluderer vi at

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

□

Eksempel 1.9.19. Når $n = 3$ og $k = 1$, fastslår Proposisjon 1.9.18 at

$$\binom{3}{1} + \binom{3}{0} = \binom{4}{1},$$

altså at

$$3 + 1 = 4.$$

Eksempel 1.9.20. Når $n = 3$ og $k = 2$, fastslår Proposisjon 1.9.18 at

$$\binom{3}{2} + \binom{3}{1} = \binom{4}{2},$$

altså at

$$3 + 3 = 6.$$

Eksempel 1.9.21. Når $n = 3$ og $k = 3$, fastslår Proposisjon 1.9.18 at

$$\binom{3}{3} + \binom{3}{2} = \binom{4}{3},$$

altså at

$$1 + 3 = 4.$$

Eksempel 1.9.22. Når $n = 5$ og $k = 1$, fastslår Proposisjon 1.9.18 at

$$\binom{5}{1} + \binom{5}{0} = \binom{6}{1},$$

altså at

$$5 + 1 = \binom{6}{1}.$$

Vi deduserer at $\binom{6}{1} = 6$.

Eksempel 1.9.23. Når $n = 5$ og $k = 2$, fastslår Proposisjon 1.9.18 at

$$\binom{5}{2} + \binom{5}{1} = \binom{6}{2},$$

altså at

$$10 + 5 = \binom{6}{2}.$$

Vi deduserer at $\binom{6}{2} = 15$.

Eksempel 1.9.24. Når $n = 5$ og $k = 3$, fastslår Proposisjon 1.9.18 at

$$\binom{5}{3} + \binom{5}{2} = \binom{6}{3},$$

altså at

$$10 + 10 = \binom{6}{3}.$$

Vi deduserer at $\binom{6}{3} = 20$.

Eksempel 1.9.25. Når $n = 5$ og $k = 4$, fastslår Proposisjon 1.9.18 at

$$\binom{5}{4} + \binom{5}{3} = \binom{6}{4},$$

altså at

$$5 + 10 = \binom{6}{4}.$$

Vi deduserer at $\binom{6}{4} = 15$.

Eksempel 1.9.26. Når $n = 5$ og $k = 5$, fastslår Proposisjon 1.9.18 at

$$\binom{5}{5} + \binom{5}{4} = \binom{6}{5},$$

altså at

$$1 + 5 = \binom{6}{5}.$$

Vi deduserer at $\binom{6}{5} = 6$.

Merknad 1.9.27. La oss sette opp binomialkoeffisientene på følgende måte. Det k-te tallet fra venstre, ved å telle k fra 0 til n, i den n-te raden fra toppen, ved å telle n fra 1, er binomialkoeffisienten $\binom{n}{k}$. For eksempel er det andre tallet fra venstre (ved å telle fra 0) i den fjerde raden fra toppen 6, som er binomialkoeffisienten $\binom{4}{2}$.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Proposisjonen 1.9.18 sier at når vi legger sammen to tall i en rad, får vi tallet mellom dem i den neste raden. For eksempel når vi legger sammen tallene 4 og 6 i den fjerde raden, får vi 10, som står mellom 4 og 6 i den femte raden.

Terminologi 1.9.28. Oppsettet av tallene i Merknad 1.9.27 kalles for *Pascals trekant*.

Proposisjon 1.9.29. La n være et naturlig tall, og la k være et heltall slik at $0 \leq k \leq n$. Da er $\binom{n}{k}$ et naturlig tall.

Bevis. Først sjekker vi om proposisjonen er sann når $n = 1$. I dette tilfellet er utsagnet at $\binom{1}{k}$ er et naturlig tall for hvert heltall k slik at $0 \leq k \leq 1$, altså når $k = 0$ og når $k = 1$. Ut ifra Proposisjon 1.9.8 er det sant at $\binom{1}{0}$ er et naturlig tall, og ut ifra Proposisjon 1.9.9 er det sant at $\binom{1}{1}$ er et naturlig tall.

Anta nå at proposisjonen har blitt bevist når n er et gitt naturlig tall m. Således har det blitt bevist at $\binom{m}{k}$ er et naturlig tall for alle heltallene k slik at $0 \leq k \leq m$. Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Ut ifra Proposisjon 1.9.8 er $\binom{m+1}{0}$ et naturlig tall.

(2) La k være et naturlig tall. Fra antakelsen at $\binom{m}{k}$ er et naturlig tall for alle heltallene k slik at $0 \leq k \leq m$, er $\binom{m}{k}$ og $\binom{m}{k-1}$ naturlige tall. Derfor er

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1}$$

et naturlig tall. Ut ifra Proposisjon 1.9.18 vet vi dessuten at

$$\binom{m+1}{k} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k-1}.$$

Vi deduserer at $\binom{m+1}{k}$ er et naturlig tall.

(3) Ut ifra Korollar 1.9.11 er $\binom{m+1}{m+1}$ et naturlig tall.

Dermed er $\binom{m+1}{k}$ et naturlig tall for alle naturlige tall k slik at $0 \leq k \leq m+1$. Således er proposisjonen sann når n er det naturlige tallet $m+1$.

Ved induksjon konkluderer vi at proposisjonen er sann når n er et hvilket som helst naturlig tall.

□

Proposisjon 1.9.30. La x og y være tall. La n være et heltall slik at $n \geq 0$. Da er

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i.$$

Bevis. Først sjekker vi om proposisjonen er sann når $n = 0$. I dette tilfellet er utsagnet at

$$(x+y)^0 = \sum_{i=0}^{0} \binom{0}{i} x^{0-i} y^i.$$

Siden $(x+y)^0 = 1$ og

$$\sum_{i=0}^{0} \binom{0}{i} x^{0-i} y^i = \binom{0}{0} x^{0-0} y^0 = 1 \cdot x^0 y^0 = 1,$$

er dette sant.

Anta nå at proposisjonen har blitt bevist når n er et gitt naturlig tall m. Således har det blitt bevist at

$$(x+y)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} a^{m-i} b^i.$$

Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Vi har:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{m+1} &= (x+y)^m \cdot (x+y) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^{m-i} y^i \right) \cdot (x+y) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^{m-i} y^i \right) \cdot x + \left(\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^{m-i} y^i \right) \cdot y \\
&= \left(\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^{m+1-i} y^i \right) + \left(\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^{m-i} y^{i+1} \right)
\end{aligned}$$

(2) Vi har:

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^{m+1-i} y^i = \binom{m}{0} x^{m+1-0} y^0 + \left(\sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} x^{m+1-i} y^i \right).$$

(3) Ut ifra Proposisjon 1.9.8 er $\binom{m}{0} = 1$. Derfor er

$$\binom{m}{0} x^{m+1-0} y^0 + \left(\sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} x^{m+1-i} y^i \right) = x^{m+1} + \left(\sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} x^{m+1-i} y^i \right).$$

(4) Vi har:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^{m-i} y^{i+1} &= \sum_{i=1}^{m+1} \binom{m}{i-1} x^{m-(i-1)} y^{(i-1)+1} \\
&= \sum_{i=1}^{m+1} \binom{m}{i-1} x^{m+1-i)} y^i \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i-1} x^{m+1-i)} y^i \right) + \binom{m}{(m+1)-1} x^{m+1-(m+1)} y^{m+1} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i-1} x^{m+1-i)} y^i \right) + \binom{m}{m} x^0 y^{m+1}.
\end{aligned}$$

(5) Ut ifra Korollar 1.9.11 er $\binom{m}{m} = 1$. Derfor er:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i-1} x^{m+1-i)} y^i \right) + \binom{m}{m} x^0 y^{m+1} = \left(\sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i-1} x^{m+1-i)} y^i \right) + y^{m+1}.$$

(6) Vi har:

$$x^{m+1} + \left(\sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} x^{m+1-i} y^i \right) + \left(\sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i-1} x^{m+1-i)} y^i \right) + y^{m+1}$$
$$= x^{m+1} + \left(\sum_{i=1}^{m} \left(\binom{m}{i} + \binom{m}{i-1} \right) x^{m+1-y} y^i \right) + y^{m+1}$$

(7) Ut ifra Proposisjon 1.9.18 er

$$\binom{m+1}{i} = \binom{m}{i} + \binom{m}{i-1}$$

for alle heltall i slik at $1 \leq i \leq m$. Vi deduserer at

$$x^{m+1} + \left(\sum_{i=1}^{m} \left(\binom{m}{i} + \binom{m}{i-1} \right) x^{m+1-y} y^i \right) + y^{m+1}$$
$$= x^{m+1} + \left(\sum_{i=1}^{m} \left(\binom{m}{i} + \binom{m}{i-1} \right) x^{m+1-y} y^i \right) y^{m+1}$$
$$= x^{m+1} + \left(\sum_{i=1}^{m} \binom{m+1}{i} x^{m+1-i} y^i \right) + y^{m+1}.$$

Vi deduserer fra (1) – (7) at

$$(x+y)^{m+1} = x^{m+1} + \left(\sum_{i=1}^{m} \binom{m+1}{i} x^{m+1-i} y^i \right) + y^{m+1}.$$

Nå gjør vi følgende observasjoner.

(1) Vi har:

$$\sum_{i=0}^{m+1} \binom{m+1}{i} x^{m+1-i} y^i$$
$$= \binom{m+1}{0} x^{m+1-0} y^0 + \left(\sum_{i=1}^{m} \binom{m+1}{i} x^{m+1-i} y^i \right) + \binom{m+1}{m+1} x^{m+1-(m+1)} y^{m+1}$$
$$= \binom{m+1}{0} x^{m+1} + \left(\sum_{i=1}^{m} \binom{m+1}{i} x^{m+1-i} y^i \right) + \binom{m+1}{m+1} y^{m+1}$$

(2) Ut ifra Proposisjon 1.9.8 er $\binom{m+1}{0} = 1$. Ut ifra Korollar 1.9.11 er $\binom{m+1}{m+1} = 1$. Derfor er

$$\binom{m+1}{0} x^{m+1} + \left(\sum_{i=1}^{m} \binom{m+1}{i} x^{m+1-i} y^i \right) + \binom{m+1}{m+1} y^{m+1}$$
$$= x^{m+1} + \left(\sum_{i=1}^{m} \binom{m+1}{i} x^{m+1-i} y^i \right) + y^{m+1}.$$

Vi deduserer fra (1) – (2) at

$$\sum_{i=0}^{m+1} \binom{m+1}{i} x^{m+1-i} y^i = x^{m+1} + \left(\sum_{i=1}^{m} \binom{m+1}{i} x^{m+1-i} y^i \right) + y^{m+1}.$$

For å oppsummere beviset så langt, har vi fastslått at

$$(x+y)^{m+1} = x^{m+1} + \left(\sum_{i=1}^{m} \binom{m+1}{i} x^{m+1-i} y^i \right) + y^{m+1}$$

og at

$$x^{m+1} + \left(\sum_{i=1}^{m} \binom{m+1}{i} x^{m+1-i} y^i \right) + y^{m+1} = \sum_{i=0}^{m+1} \binom{m+1}{i} x^{m+1-i} y^i.$$

Vi deduserer at

$$(x+y)^{m+1} = \sum_{i=0}^{m+1} \binom{m+1}{i} x^{m+1-i} y^i.$$

Dermed er proposisjonen sann når n er det naturlige tallet $m+1$.

Ved induksjon konkluderer vi at proposisjonen er sann når n er et hvilket som helst naturlig tall.

□

Eksempel 1.9.31. Når $n = 2$, fastslår Proposisjon 1.9.30 at

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2,$$

som forventet.

Eksempel 1.9.32. Når $n = 3$, fastslår Proposisjon 1.9.30 at

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

Eksempel 1.9.33. Når $n = 4$, fastslår Proposisjon 1.9.30 at

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4.$$

Merknad 1.9.34. Proposisjon 1.9.30 kalles noen ganger *binomialteoremet*.

Merknad 1.9.35. Den viktigste delen av beviset for Proposisjon 1.9.30 er ligningen

$$(x+y)^m \cdot (x+y) = \left(\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^{m-i} y^i \right) \cdot (x+y).$$

Det er her vi benytter antakelsen at

$$(x+y)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} a^{m-i} b^i.$$

Merknad 1.9.36. Til å begynne med kan manipulasjoner med summetegn som i beviset for Proposisjon 1.9.30 se litt forvirrende ut. I så fall skriv alle summene uten å bruke summetegnet. Skriv for eksempel

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^{i}$$

som

$$\binom{n}{0} x^{n} y^{0} + \binom{n}{1} x^{n-1} y^{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} x^{1} y^{n-1} + \binom{n}{n} x^{0} y^{n}.$$

1.10 Rekursjon

Merknad 1.10.1. Hvert tall i sekvensen

$$1, 2, 4, 8, 16, \ldots$$

er to ganger det foregående. Hvordan kan vi beskrive sekvensen formelt?

Vi kan ikke skrive ut hele sekvensen uansett hvor mye tid vi har: sammenlign med Merknad 1.4.1. Istedenfor benytter vi en type definisjon som kalles rekursjon.

Terminologi 1.10.2. Anta at vi ønsker å definere et heltall u_n for hvert naturlig tall n. *Rekursjon* sier at vi kan gjøre det på følgende måte:

(1) Definer u_1, u_2, $\ldots$, u_r, hvor r er et gitt naturlig tall.

(2) La m være et naturlig tall som er større enn eller likt r. Hvis det antas at heltallet u_i har blitt definert for alle de naturlige tallene slik at $r \leq i \leq m$, definer heltallet u_{m+1}.

Merknad 1.10.3. I Merknad 1.4.3 så vi at induksjon gir en algoritme for å konstruere et bevis. På en lignende måte gir rekursjon en algoritme for å definere det n-te naturlige tallet i en sekvens, for et hvilket som helst naturlig tall n:

(i) Etter å ha fullført Steg (1) i Terminologi 1.10.2, har vi definert alle heltallene i sekvensen opp til det r-te;

(ii) Steg (2) i Terminologi 1.10.2 fastslår at vi da kan definere det $(r+1)$-te heltallet i sekvensen;

(iii) Steg (2) i Terminologi 1.10.2 fastslår at vi *da* kan definere det $(r+2)$-te heltallet i sekvensen;

(iv) Steg (2) i Terminologi 1.10.2 fastslår at vi *da* kan definere det $(r+3)$-te heltallet i sekvensen;

(v) Slik fortsetter vi til vi når det naturlige tallet vi er interessert i.

Eksempel 1.10.4. Følgende definerer en sekvens ved rekursjon.

(1) Det første heltallet i sekvensen er 1. Med andre ord er $u_1 = 1$. Ved å la r være 1, har vi dermed fullført Steg (1) i Terminologi 1.10.2.

(2) La m være et naturlig tall. Anta at det i-te heltallet i sekvensen, det vil si u_i, har blitt definert for alle de naturlige tallene i slik at $1 \leq i \leq m$. Da definerer vi heltallet u_{m+1} være $2u_m$. Ved å la r være 1, har vi dermed fullført Steg (2) i Terminologi 1.10.2.

La oss se hvordan algoritmen i Merknad 1.10.3 ser ut for denne sekvensen.

(i) Ut ifra (1) er 1 det første heltallet i sekvensen.

(ii) Fra (i) og (2) følger det at $2 \cdot 1 = 2$ er det andre heltallet i sekvensen.

(iii) Fra (ii) og (2) følger det at $2 \cdot 2 = 4$ er det tredje heltallet i sekvensen.

(iv) Fra (iii) og (2) følger det at $2 \cdot 4 = 8$ er det fjerde heltallet i sekvensen.

(v) Slik fortsetter vi.

Således ser vi at (1) og (2) formelt definerer sekvensen

$$1, 2, 4, 8, 16, \ldots$$

som vi tok for oss i Merknad 1.10.1.

Eksempel 1.10.5. Følgende definerer en sekvens ved rekursjon.

(1) Det første heltallet i sekvensen er -1. Med andre ord er $u_1 = -1$. Ved å la r være 1, har vi dermed fullført Steg (1) i Terminologi 1.10.2.

(2) La m være et naturlig tall. Anta at det i-te heltallet i sekvensen, det vil si u_i, har blitt definert for alle de naturlige tallene i slik at $1 \leq i \leq m$. Da definerer vi heltallet u_{m+1} til å være $u_m + 3$.

Dermed har vi formelt definert sekvensen:

$$-1, 2, 5, 8, 11, \ldots.$$

Merknad 1.10.6. I både Eksempel 1.10.4 og Eksempel 1.10.5 lot vi det naturlige tallet r i Terminologi 1.10.2 til å være 1. I den neste delen skal vi se på et eksempel hvor vi lar r være 2.

Merknad 1.10.7. Induksjon og rekursjon går hånd i hånd. For å bevise et matematisk utsagn som handler om en sekvens av heltall definert ved rekursjon, benytter vi typisk induksjon.

1.11 Fibonaccitall

Definisjon 1.11.1. Følgende definerer ved rekursjon *sekvensen av Fibonaccitall.*

(1) Det første heltallet i sekvensen er 1. Med andre ord er $u_1 = 1$.

(2) Det andre heltallet i sekvensen er 1. Med andre ord er $u_2 = 1$.

(3) La m være et naturlig tall slik at $m \geq 2$. Anta at det i-te heltallet i sekvensen, det vil si u_i, har blitt definert for alle de naturlige tallene i slik at $2 \leq i \leq m$. Da definerer vi heltallet u_{m+1} til å være $u_{m-1} + u_m$.

Merknad 1.11.2. Steg (1) og Steg (2) i Definisjon 1.11.1 fullfører, ved å la r være 2, Steg (1) i Terminologi 1.10.2. Steg (3) i Definisjon 1.11.1 fullfører, ved å la r være 2, Steg (2) i Terminologi 1.10.2.

Merknad 1.11.3. La oss se hvordan algoritmen i Merknad 1.10.3 ser ut for sekvensen av Fibonaccitall.

(i) Ut ifra Steg (1) i Definisjon 1.11.1 er 1 det første heltallet i sekvensen.

(ii) Ut ifra Steg (2) i Definisjon 1.11.1 er 1 det andre heltallet i sekvensen.

(iii) Fra (i), (ii) og Steg (3) i Definisjon 1.11.1, følger det at $1 + 1 = 2$ er det tredje heltallet i sekvensen.

(iv) Fra (ii), (iii) og Steg (3) i Definisjon 1.11.1, følger det at $1 + 2 = 3$ er det fjerde heltallet i sekvensen.

(iv) Fra (iii), (iv) og Steg (4) i Definisjon 1.11.1, følger det at $2 + 3 = 5$ er det femte heltallet i sekvensen.

(v) Slik fortsetter vi.

Dermed er sekvensen av Fibonaccitall:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots.$$

Terminologi 1.11.4. La n være et naturlig tall. Heltallet u_n i sekvensen av Fibonaccitall kalles det *n-te Fibonaccitallet.*

Notasjon 1.11.5. La n være et naturlig tall. I resten av dette kapittelet kommer alltid u_n til å betegne det n-te Fibonaccitallet.

Proposisjon 1.11.6. La n være et naturlig tall. Da er

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_{n+2} - 1.$$

Bevis. Først sjekker vi om proposisjonen er sann når $n = 1$. I dette tilfellet er utsagnet at

$$u_1 = u_{1+2} - 1.$$

Siden $u_1 = 1$ og

$$u_{1+2} - 1 = u_3 - 1 = 2 - 1 = 1,$$

er dette sant.

Anta nå at proposisjonen har blitt bevist når n er et gitt naturlig tall m. Således har det blitt bevist at

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_m = u_{m+2} - 1.$$

Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Fra antakelsen at

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_m = u_{m+2} - 1,$$

følger det at

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \cdots + u_m + u_{m+1} &= (u_{m+2} - 1) + u_{m+1} \\ &= u_{m+2} + u_{m+1} - 1. \end{aligned}$$

(2) Ut ifra definisjonen til sekvensen av Fibonaccitall er

$$u_{m+3} = u_{m+2} + u_{m+1}.$$

Fra (1) – (2) deduserer vi at

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_m + u_{m+1} = u_{m+3} - 1.$$

Dermed er proposisjonen sann når n er det naturlige tallet $m + 1$.

Ved induksjon konkluderer vi at proposisjonen er sann når n er et hvilket som helst naturlig tall.

□

Eksempel 1.11.7. Når $n = 2$, fastslår Proposisjon 1.11.6 at

$$u_1 + u_2 = u_4 - 1,$$

altså at

$$1 + 1 = 3 - 1.$$

Eksempel 1.11.8. Når $n = 3$, fastslår Proposisjon 1.11.6 at

$$u_1 + u_2 + u_3 = u_5 - 1,$$

altså at

$$1 + 1 + 2 = 5 - 1.$$

Eksempel 1.11.9. Når $n = 4$, fastslår Proposisjon 1.11.6 at

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = u_6 - 1,$$

altså at

$$1 + 1 + 2 + 3 = 8 - 1.$$

Eksempel 1.11.10. Når $n = 9$, fastslår Proposisjon 1.11.6 at

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_9 = u_{11} - 1,$$

altså at

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 = 89 - 1.$$

Merknad 1.11.11. Den viktigste delen av dette beviset er ligningen

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_m + u_{m+1} = (u_{m+2} - 1) + u_{m+1}.$$

Det er her vi benytter antakelsen at

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_m = u_{m+2} - 1.$$

Proposisjon 1.11.12. La n være et naturlig tall slik at $n \geq 2$. Da er

$$u_n^2 = u_{n+1}u_{n-1} + (-1)^{n-1}.$$

Bevis. Først sjekker vi om proposisjonen er sann når $n = 2$. I dette tilfellet er utsagnet at

$$u_2^2 = u_{2+1}u_{2-1} + (-1)^{2-1}.$$

Siden

$$u_2^2 = 1^2 = 1$$

og

$$\begin{aligned} u_{2+1}u_{2-1} + (-1)^{2-1} &= u_3u_1 - 1 \\ &= 2 \cdot 1 - 1 \\ &= 2 - 1 \\ &= 1, \end{aligned}$$

er dette sant.

Anta nå at proposisjonen har blitt bevist når n et gitt naturlig tall m slik at $m \geq 2$. Således har det blitt bevist at

$$u_m^2 = u_{m+1}u_{m-1} + (-1)^{m-1}.$$

Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Ut ifra definisjonen til sekvensen av Fibonaccitall er

$$u_{m+1} = u_m + u_{m-1}.$$

Derfor er

$$\begin{aligned} u_{m+1}^2 - u_{m+2}u_m &= u_{m+1}\left(u_m + u_{m-1}\right) - u_{m+2}u_m \\ &= u_{m+1}u_m + u_{m+1}u_{m-1} - u_{m+2}u_m \\ &= u_m\left(u_{m+1} - u_{m+2}\right) + u_{m+1}u_{m-1}. \end{aligned}$$

(2) Ut ifra definisjonen til sekvensen av Fibonaccitall er

$$u_{m+2} = u_{m+1} + u_m.$$

Derfor er

$$u_{m+1} - u_{m+2} = -u_m.$$

Vi deduserer at

$$u_m\left(u_{m+1} - u_{m+2}\right) + u_{m+1}u_{m-1} = -u_m^2 + u_{m+1}u_{m-1}.$$

(3) Fra antakelsen at

$$u_m^2 = u_{m+1}u_{m-1} + (-1)^{m-1},$$

følger det at

$$\begin{aligned} -u_m^2 + u_{m+1}u_{m-1} &= -(-1)^{m-1} \\ &= (-1)\cdot(-1)^{m-1} \\ &= (-1)^{m-1+1} \\ &= (-1)^m. \end{aligned}$$

Fra (1) – (3) deduserer vi at

$$u_{m+1}^2 - u_{m+2}u_m = (-1)^m.$$

Derfor er

$$u_{m+1}^2 = u_{m+2}u_m + (-1)^m.$$

Dermed er proposisjonen sann når n er det naturlige tallet $m+1$.

Ved induksjon konkluderer vi at proposisjonen er sann når n er et hvilket som helst naturlig tall slik at $n \geq 2$.

□

Eksempel 1.11.13. Når $n = 3$, fastslår Proposisjon 1.11.12 at

$$2^2 = 3 \cdot 1 + 1.$$

Eksempel 1.11.14. Når $n = 4$, fastslår Proposisjon 1.11.12 at

$$3^2 = 5 \cdot 2 - 1.$$

Eksempel 1.11.15. Når $n = 9$, fastslår Proposisjon 1.11.12 at

$$34^2 = 55 \cdot 21 + 1.$$

Merknad 1.11.16. Den viktigste delen av beviset for Proposisjon 1.11.12 er Steg (3). Det er her vi benytter antakelsen at

$$u_m^2 = u_{m+1}u_{m-1} + (-1)^{m-1}.$$

1.12 Binets formel for Fibonaccitallene

Merknad 1.12.1. Nå skal vi finne en formel for det n-te Fibonaccitallet.

Proposisjon 1.12.2. La x være en løsning til ligningen

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

La n være et naturlig tall slik at $n \geq 2$. Da er

$$x^n = xu_n + u_{n-1}.$$

Bevis. Først sjekker vi om proposisjonen er sann når $n = 2$. I dette tilfellet er utsagnet at

$$x^2 = xu_2 + u_1.$$

Siden $u_1 = 1$ og $u_2 = 1$, er

$$xu_2 + u_1 = x \cdot 1 + 1 = x + 1.$$

Ut ifra antakelsen at

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

er

$$x^2 = x + 1.$$

Dermed er utsagnet sant.

Anta nå at proposisjonen har blitt bevist for et gitt heltall m slik at $m \geq 2$. Således har det blitt bevist at

$$x^m = xu_m + u_{m-1}.$$

Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Fra antakelsen at

$$x^m = xu_m + u_{m-1}$$

følger det, ved å gange begge sidene i denne ligningen med x, at

$$x^{m+1} = x^2u_m + xu_{m-1}.$$

(2) Siden x er en løsning til ligningen

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

er

$$x^2 = x + 1.$$

Fra (1) – (2) deduserer vi at

$$x^{m+1} = (x+1)u_m + xu_{m-1}.$$

Nå gjør vi følgende observajoner.

(1) Vi har:

$$\begin{aligned}(x+1)u_m + xu_{m-1} &= xu_m + u_m + xu_{m-1}\\ &= xu_m + xu_{m-1} + u_m\\ &= x(u_m + u_{m-1}) + u_m.\end{aligned}$$

(2) Ut ifra definisjonen til sekvensen av Fibonaccitall er

$$u_{m+1} = u_m + u_{m-1}.$$

Fra (1) – (2) deduserer vi at

$$(x+1)u_m + xu_{m-1} = xu_{m+1} + u_m.$$

For å oppsummere beviset så langt, har vi fastslått at

$$x^{m+1} = (x+1)u_m + xu_{m-1}$$

og at

$$(x+1)u_m + xu_{m-1} = xu_{m+1} + u_m.$$

Vi deduserer at

$$x^{m+1} = xu_{m+1} + u_m.$$

Dermed er proposisjonen sann når $n = m + 1$.

Ved induksjon konkluderer vi at proposisjonen er sann for alle naturlige tall n slik at $n \geq 2$.

□

Eksempel 1.12.3. La x være en løsning til ligningen

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Når $n = 3$, fastslår Proposisjon 1.12.2 at

$$\begin{aligned}x^3 &= u_3x + u_2\\ &= 2x + 1.\end{aligned}$$

Eksempel 1.12.4. La x være en løsning til ligningen

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Når $n = 5$, fastslår Proposisjon 1.12.2 at

$$\begin{aligned} x^5 &= u_5 x + u_5 \\ &= 5x + 3 \end{aligned}$$

Eksempel 1.12.5. La x være en løsning til ligningen

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Når $n = 7$, fastslår Proposisjon 1.12.2 at

$$\begin{aligned} x^7 &= u_7 x + u_6 \\ &= 13x + 8 \end{aligned}$$

Eksempel 1.12.6. La x være en løsning til ligningen

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Når $n = 9$, fastslår Proposisjon 1.12.2 at

$$\begin{aligned} x^9 &= u_9 x + u_8 \\ &= 34x + 21. \end{aligned}$$

Lemma 1.12.7. Tallene $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ og $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ er løsninger til ligningen

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Bevis. For å bevise at $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ er en løsning til ligningen

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

regner vi som følger:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 &= \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)\cdot\left(1+\sqrt{5}\right)}{4} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 \\ &= \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 \\ &= \frac{1+2\sqrt{5}+5-2-2\sqrt{5}-4}{4} \\ &= \frac{0}{4} \\ &= 0. \end{aligned}$$

For å bevise at $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ er en løsning til ligningen

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

regner vi som følger:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} - 1 &= \frac{\left(1-\sqrt{5}\right)\cdot\left(1-\sqrt{5}\right)}{4} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} - 1 \\
&= \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} - 1 \\
&= \frac{1-2\sqrt{5}+5-2+2\sqrt{5}-4}{4} \\
&= \frac{0}{4} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Merknad 1.12.8. Tallet $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ kalles noen ganger det gyldne snitt.

Proposisjon 1.12.9. La n være et naturlig tall. Da er

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Bevis. Fra Proposisjon 1.12.2 og Lemma 1.12.7 følger det at

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cdot u_n + u_{n-1},$$

og at

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cdot u_n + u_{n-1}.$$

Ved å benytte oss av disse faktaene, regner vi som følger:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot u_n + u_{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cdot u_n - u_{n-1} \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot u_n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cdot u_n \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cdot u_n \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot u_n \\
&= \frac{2\sqrt{5}}{2} \cdot u_n \\
&= \sqrt{5} \cdot u_n.
\end{aligned}$$

Dermed har vi bevist at

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \sqrt{5} \cdot u_n.$$

Ved å dele begger sidene i denne ligningen med $\sqrt{5}$, deduserer vi at proposisjonen er sann.

$\square$

Eksempel 1.12.10. Når $n = 2$, fastslår Proposisjon 1.12.9 at

$$1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \right).$$

Eksempel 1.12.11. Når $n = 3$, fastslår Proposisjon 1.12.9 at

$$2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3 \right).$$

Eksempel 1.12.12. Når $n = 6$, fastslår Proposisjon 1.12.9 at

$$8 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^6 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^6 \right).$$

Eksempel 1.12.13. Når $n = 9$, fastslår Proposisjon 1.12.9 at

$$34 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^9 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^9 \right).$$

Terminologi 1.12.14. Ligningen i Proposisjon 1.12.9 kalles *Binets formel*.

Merknad 1.12.15. Flere fakta kan deduseres fra Proposisjon 1.12.9. Etter noen forberedelser skal se på et eksempel: Proposisjon 1.12.18.

Lemma 1.12.16. Vi har:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = -1.$$

Bevis. Vi regner som følger:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) &= \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)}{4} \\ &= \frac{1+\sqrt{5}-\sqrt{5}-5}{4} \\ &= \frac{-4}{4} \\ &= -1.\end{aligned}$$

$\square$

Lemma 1.12.17. Vi har:

$$\frac{1}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Bevis. Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Ut ifra Eksempel 1.12.10 er

$$1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right).$$

Ved å gange begge sidene av denne ligningen med $\frac{1}{\sqrt{5}}$, følger det at

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right).$$

(2) Vi har:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right) \\
&= \frac{1}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right)
\end{aligned}$$

Fra (1) – (2) deduserer vi at

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right).$$

□

Proposisjon 1.12.18. La n være et naturlig tall. Da er

$$u_{n+2}^2 - u_n^2 = u_{2n+2}.$$

Bevis. For å gjøre beviset lettere å lese, la x være $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, og la y være $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Vi gjør følgende observasjoner.

(1) La m være et naturlig tall. Ut ifra Proposisjon 1.12.9 er

$$u_m = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(x^m - y^m \right).$$

Derfor er

$$\begin{aligned}
u_m^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \left(x^m - y^m \right) \right)^2 \\
&= \frac{1}{5} \left(x^m - y^m \right) \left(x^m - y^m \right) \\
&= \frac{1}{5} \left(x^{2m} - 2x^m y^m + y^{2m} \right) \\
&= \frac{1}{5} \left(x^{2m} - 2(xy)^m + y^{2m} \right).
\end{aligned}$$

(2) Ut ifra Lemma 1.12.16 er

$$2 \cdot (xy)^m = 2 \cdot (-1)^m.$$

Fra (1) – (2) deduserer vi at

$$u_m^2 = \frac{1}{5}\left(x^{2m} - 2\cdot(-1)^m + y^{2m}\right).$$

Dermed er

$$u_n^2 = \frac{1}{5}\left(x^{2n} - 2\cdot(-1)^n + y^{2n}\right)$$

og er

$$u_{n+2}^2 = \frac{1}{5}\left(x^{2(n+2)} - 2\cdot(-1)^{n+2} + y^{2(n+2)}\right).$$

Vi deduserer at

$$\begin{aligned}
&u_{n+2}^2 - u_n^2\\
&= \frac{1}{5}\left(x^{2(n+2)} - 2\cdot(-1)^{n+2} + y^{2(n+2)}\right) - \frac{1}{5}\left(x^{2n} - 2\cdot(-1)^n + y^{2n}\right)\\
&= \frac{1}{5}\left(x^{2(n+2)} - 2\cdot(-1)^n\cdot(-1)^2 + y^{2(n+2)} - x^{2n} + 2\cdot(-1)^n - y^{2n}\right)\\
&= \frac{1}{5}\left(x^{2(n+2)} + y^{2(n+2)} - x^{2n} - y^{2n} - 2\cdot(-1)^n + 2\cdot(-1)^n\right)\\
&= \frac{1}{5}\left(x^{2(n+2)} + y^{2(n+2)} - x^{2n} - y^{2n}\right)
\end{aligned}$$

Dermed er

$$u_{n+2}^2 - u_n^2 = \frac{1}{5}\left(x^{2(n+2)} + y^{2(n+2)} - x^{2n} - y^{2n}\right).$$

Nå gjør vi følgende observasjoner.

(1) Ut ifra Lemma 1.12.16 er

$$x^2y^2 = (xy)^2 = (-1)^2 = 1.$$

Derfor er

$$\begin{aligned}
\frac{1}{5}\left(x^{2(n+2)} + y^{2(n+2)} - x^{2n} - y^{2n}\right) &= \frac{1}{5}\left(x^{2(n+2)} + y^{2(n+2)} - x^2y^2x^{2n} - x^2y^2y^{2n}\right)\\
&= \frac{1}{5}\left(x^{2n+4} + y^{2n+4} - y^2x^{2n+2} - x^2y^{2n+2}\right)\\
&= \frac{1}{5}\left(x^2 - y^2\right)\left(x^{2n+2} - y^{2n+2}\right)
\end{aligned}$$

(2) Ut ifra Lemma 1.12.17 er

$$\frac{1}{5}\left(x^2 - y^2\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Derfor er

$$\frac{1}{5}\left(x^2 - y^2\right)\left(x^{2n+2} - y^{2n+2}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x^{2n+2} - y^{2n+2}\right).$$

(3) Ut ifra Proposisjon 1.12.9 er
$$u_{2n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x^{2n+2} - y^{2n+2}\right).$$

Vi deduserer fra (1) – (3) at
$$\frac{1}{5}\left(x^{2(n+2)} + y^{2(n+2)} - x^{2n} - y^{2n}\right) = x_{2n+2}.$$

For å oppsummere beviset så langt, har vi fastslått at
$$u_{n+2}^2 - u_n^2 = \frac{1}{5}\left(x^{2(n+2)} + y^{2(n+2)} - x^{2n} - y^{2n}\right)$$
og at
$$\frac{1}{5}\left(x^{2(n+2)} + y^{2(n+2)} - x^{2n} - y^{2n}\right) = x_{2n+2}.$$
Vi deduserer at
$$u_{n+2}^2 - u_n^2 = u_{2n+2}.$$

□

Eksempel 1.12.19. Når $n = 2$, fastslår Proposisjon 1.12.18 at
$$3^2 - 1^2 = 8.$$

Eksempel 1.12.20. Når $n = 3$, fastslår Proposisjon 1.12.18 at
$$5^2 - 2^2 = 21.$$

Eksempel 1.12.21. Når $n = 5$, fastslår Proposisjon 1.12.18 at
$$13^2 - 5^2 = 144.$$

1.13 Varianter av induksjon

Merknad 1.13.1. Det finnes mange varianter av induksjon. Noen av disse kalles noen ganger ≪sterk induksjon≫, men vi skal ikke benytte denne terminologien. Nå skal vi se på de viktigste variantene for oss.

Terminologi 1.13.2. La c være et heltall slik at $c \geq 0$. Anta at vi har et gitt matematisk utsagn for hvert heltall større enn eller likt et gitt heltall r. Anta dessuten at vi ønsker å bevise utsagnet for hvert av disse heltallene. *Induksjon* sier at vi kan gjøre det på følgende måte:

(1) Sjekk om utsagnet er sant for alle heltallene r, $r + 1$, …, $r + c$.

(2) Hvis det antas at utsagnet har blitt bevist for alle heltallene m, $m-1$, …, $m-c$, hvor m er et gitt heltall som er større enn eller likt $r+c$, bevis at utsagnet er sant for heltallet $m+1$.

Merknad 1.13.3. Induksjon som beskrevet i Terminologi 1.4.2 er det samme som induksjon som beskrevet i Terminologi 1.13.2 for $c = 0$.

Merknad 1.13.4. Idéen bak induksjon som beskrevet i Terminologi 1.13.2 er at Steg (1) og Steg (2) gir oss følgende algoritmen for å konstruere et bevis for utsagnet for et hvilket som helst heltall m større enn r:

(i) Steg (1) i Terminologi 1.13.2 fastslår at vi kan bevise utsagnet for alle heltallene m slik at $r \leq m \leq r+c$;

(ii) Steg (2) i Terminologi 1.13.2 fastslår at vi da kan bevise utsagnet når $m = r+c+1$;

(iii) Steg (2) i Terminologi 1.13.2 fastslår at vi *da* kan bevise utsagnet når $m = r+c+2$;

(iv) Steg (2) i Terminologi 1.13.2 fastslår at vi *da* kan bevise utsagnet når $m = r+c+3$;

(v) Slik fortsetter til vi når heltallet vi er interessert i.

Merknad 1.13.5. Algoritmen i Merknad 1.4.3 er det samme som algoritmen i Merknad 1.13.4 for $c = 0$.

Proposisjon 1.13.6. La x være et heltall, og la n være et naturlig tall. Da er

$$x^n - 1 = (x-1) \cdot \left(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1\right).$$

Bevis. Først sjekker vi om proposisjonen er sann når $n = 1$ og når $n = 2$.

(1) Når $n = 1$ er utsagnet at

$$x^1 - 1 = (x-1) \cdot 1.$$

Dette er sant.

(2) Når $n = 2$ er utsagnet at

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1).$$

Siden

$$(x+1)(x-1) = x^2 + x - x - 1 = x^2 - 1,$$

er dette sant.

Anta nå at proposisjonen har blitt bevist når $n = m$ og når $n = m-1$, hvor m er et naturlig tall slik at $m \geq 2$. Således har det blitt bevist at

$$x^m - 1 = (x-1) \cdot \left(x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1\right)$$

og at

$$x^{m-1} - 1 = (x-1) \cdot \left(x^{(m-1)-1} + x^{(m-1)-2} + \cdots + x + 1\right).$$

Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Vi har:

$$\begin{aligned}(x+1)\left(x^m-1\right)-x\left(x^{m-1}-1\right) &= x^{m+1}-x+x^m-1-x^m+x \\ &= x^{m+1}-1.\end{aligned}$$

(2) Fra antakelsen at

$$\begin{aligned}x^m-1 &= (x-1)\cdot\left(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1\right) \\ &= (x-1)\cdot\left(\sum_{i=0}^{m-1}x^i\right),\end{aligned}$$

og antakelsen at

$$\begin{aligned}x^{m-1}-1 &= (x-1)\cdot\left(x^{(m-1)-1}+x^{(m-1)-2}+\cdots+x+1\right) \\ &= (x-1)\cdot\left(x^{m-2}+x^{m-3}+\cdots+x+1\right) \\ &= (x-1)\cdot\left(\sum_{i=0}^{m-2}x^i\right),\end{aligned}$$

følger det at

$$\begin{aligned}&(x+1)\left(x^m-1\right)-x\left(x^{m-1}-1\right) \\ &= (x+1)(x-1)\left(\sum_{i=0}^{m-1}x^i\right)-x(x-1)\left(\sum_{i=0}^{m-2}x^i\right) \\ &= (x-1)\left((x+1)\left(\sum_{i=0}^{m-1}x^i\right)-x\left(\sum_{i=0}^{m-2}x^i\right)\right) \\ &= (x-1)\left(x\left(\sum_{i=0}^{m-1}x^i\right)+\left(\sum_{i=0}^{m-1}x^i\right)-x\left(\sum_{i=0}^{m-2}x^i\right)\right) \\ &= (x-1)\left(\left(\sum_{i=1}^{m}x^i\right)+\left(\sum_{i=0}^{m-1}x^i\right)-\left(\sum_{i=1}^{m-1}x^i\right)\right) \\ &= (x-1)\left(\left(\sum_{i=1}^{m}x^i\right)+1+\left(\sum_{i=1}^{m-1}x^i\right)-\left(\sum_{i=1}^{m-1}x^i\right)\right) \\ &= (x-1)\left(\left(\sum_{i=1}^{m}x^i\right)+1\right) \\ &= (x-1)\left(x^m+x^{m-1}+\cdots+x+1\right)\end{aligned}$$

Fra (1) – (2) deduserer vi at

$$x^{m+1}-1=(x-1)\left(x^m+x^{m-1}+\cdots+x^2+x+1\right).$$

Dermed er proposisjonen sann når n er det naturlige tallet $m+1$.

Ved induksjon konkluderer vi at proposisjonen er sann når n er et hvilket som helst naturlig tall slik at $n \geq 2$. $\square$

Eksempel 1.13.7. La x være et heltall. Når $n=3$, fastslår Proposisjon 1.13.6 at

$$x^3 - 1 = (x-1)\left(x^2 + x + 1\right).$$

Når for eksempel $x = 5$, fastslår den at

$$124 = 4 \cdot (25 + 5 + 1).$$

Eksempel 1.13.8. La x være et heltall. Når $n=5$, fastslår Proposisjon 1.13.6 at

$$x^5 - 1 = (x-1)\left(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\right).$$

Når for eksempel $x = -3$, fastslår den at

$$-244 = -4 \cdot (81 - 27 + 9 - 3 + 1).$$

Merknad 1.13.9. Det er lett å bevise Proposisjon 1.13.6 uten å benytte induksjon. Vi kan regne som følger:

$$\begin{aligned}
&(x-1)\left(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1\right) \\
&= x\left(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1\right) - \left(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1\right) \\
&= \left(x^{n} + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x\right) - \left(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1\right) \\
&= x^n - 1.
\end{aligned}$$

Dette er et helt gyldig bevis! Vi benyttet lignende algebraiske manipulasjoner i beviset vi ga for 1.13.6.

Poenget med beviset vi ga for Proposisjon 1.13.6 er å forklare hvordan en gjennomfører et bevis som benytter varianten av induksjon hvor $c = 1$ og $r = 1$ i Terminologi 1.13.2.

Merknad 1.13.10. Den viktigste delen av beviset for Proposisjon 1.13.6 er ligningen

$$(x+1)\left(x^m - 1\right) - x\left(x^{m-1} - 1\right) = (x+1)(x-1)\left(\sum_{i=0}^{m-1} x^i\right) - x(x-1)\left(\sum_{i=0}^{m-2} x^i\right).$$

Det er her vi benytter både antakelsen at

$$x^m - 1 = (x-1) \cdot \left(\sum_{i=0}^{m-1} x^i\right)$$

og antakelsen at

$$x^{m-1} - 1 = (x-1) \cdot \left(\sum_{i=0}^{m-2} x^i\right).$$

Merknad 1.13.11. Kanskje ser det ut som Observasjon (1) i beviset for Proposisjon 1.13.6 har blitt tatt ut av løse luften. Det er sant at vi må være litt kreativ for å finne ligningen i denne observasjonen, og å skjønne at den har noe å si.

Vi kan se på ligningen i Observasjon (1) på følgende måte. Vi ønsker å bevise proposisjonen når $n = m + 1$. Da må vi jobbe med uttrykket $x^{m+1} - 1$. I tillegg har vi antatt at proposisjonen er sann når $n = m$ og $n = m - 1$, altså at

$$x^m - 1 = (x - 1) \cdot \left(\sum_{i=0}^{m-1} x^i \right)$$

og at

$$x^{m-1} - 1 = (x - 1) \cdot \left(\sum_{i=0}^{m-2} x^i \right).$$

Hvis vi finner en ligning med x^{m+1} på en side, og hvor både $x^m - 1$ og $x^{m-1} - 1$ dukker opp på den andre siden, kan vi benytte begge antakelsene for å si noe om x^{m+1}. Det er ingen generell oppskrift for å finne en slik ligning, men i Observasjon (1) klarte vi det.

Merknad 1.13.12. Hvis manipulasjonene med summetegn i beviset for Proposisjon 1.13.6 ser litt forvirrende ut, følg rådet gitt i Merknad 1.13.12. Skriv for eksempel

$$\sum_{i=1}^{m} x^i$$

som

$$x^m + x^{m-1} + \cdots + x^2 + x,$$

og skriv

$$\sum_{i=0}^{m-1} x^i$$

som

$$x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1.$$

Merknad 1.13.13. La oss se hvordan algoritmen i Merknad 1.13.4 ser ut for Proposisjon 1.13.6. Vi benytter varianten av induksjon hvor $c = 1$ og $r = 1$.

Vi begynner med å sjekke om proposisjonen er sann for alle de naturlige tallene r, $r + 1$, …, $r + c$, det vil si når $n = 1$ og når $n = 2$. Vi sjekker altså at

$$x^1 - 1 = x - 1$$

og at

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1).$$

Så argumenterer vi som i beviset for Proposisjon 1.13.6, ved å erstatte m med 2. Vi gjør altså følgende observasjoner.

(1) Vi har:

$$\begin{aligned}(x+1)\left(x^2-1\right)-x\left(x^{2-1}-1\right) &= x^3-x+x^2-1-x^2+x\\ &= x^3-1\end{aligned}$$

(2) Vi vet at

$$x^2-1=(x-1)\cdot(x+1)$$

og at

$$x^1-1=(x-1)\cdot 1=x-1.$$

Det følger at

$$\begin{aligned}&(x+1)\left(x^2-1\right)-x\left(x^{2-1}-1\right)\\ &=(x+1)(x-1)(x+1)-x(x-1)\\ &=(x-1)\left((x+1)(x+1)-x\right)\\ &=(x-1)\left(x(x+1)+(x+1)-x\right)\\ &=(x-1)\left(x^2+x+(x+1)-x\right)\\ &=(x-1)\left((x^2+x)+1+x-x\right)\\ &=(x-1)\left((x^2+x)+1\right)\\ &=(x-1)\left(x^2+x^1+1\right)\end{aligned}$$

Fra (1) – (2) deduserer vi at

$$x^3-1=(x-1)\left(x^2+x+1\right).$$

Dermed er proposisjonen sann når $n=3$.

Så argumenterer vi som i beviset for Proposisjon 1.13.6, ved å erstatte m med 3. Vi gjør altså følgende observasjoner.

(1) Vi har:

$$\begin{aligned}(x+1)\left(x^3-1\right)-x\left(x^{3-1}-1\right) &= x^4-x+x^3-1-x^3+x\\ &= x^4-1.\end{aligned}$$

(2) Vi vet at

$$x^3-1=(x-1)\cdot(x^2+x+1)$$

og at

$$x^2-1=(x-1)\cdot(x+1).$$

Det følger at

$$\begin{aligned}
&(x+1)\left(x^3-1\right) - x\left(x^{3-1}-1\right) \\
&= (x+1)(x-1)(x^2+x+1) - x(x-1)(x+1) \\
&= (x-1)\left((x+1)(x^2+x+1) - x(x+1)\right) \\
&= (x-1)\left(x(x^2+x+1) + (x^2+x+1) - x(x+1)\right) \\
&= (x-1)\left((x^3+x^2+x) + (x^2+x+1) - (x^2+x)\right) \\
&= (x-1)\left((x^3+x^2+x) + 1 + (x^2+x) - (x^2+x)\right) \\
&= (x-1)\left((x^3+x^2+x) + 1\right) \\
&= (x-1)\left(x^3+x^2+x^1+1\right)
\end{aligned}$$

Fra (1) – (2) deduserer vi at

$$x^4 - 1 = (x-1)\left(x^3+x^2+x+1\right).$$

Dermed er proposisjonen sann når $n = 4$.

Slik fortsetter vi til vi når heltallet vi er interessert i.

1.14 Litt mer om Fibonaccitallene

Proposisjon 1.14.1. La n være et heltall slik at $n \geq 0$, og la k være et naturlig tall slik at $k \geq 3$. Da er

$$u_{n+k} = u_{k-1} \cdot u_{n+2} + u_{k-2} \cdot u_{n+1}.$$

Bevis. Først sjekker vi om proposisjonen er sann når $k = 3$ og når $k = 4$.

(1) Når $k = 3$, er utsagnet at

$$u_{n+3} = u_2 \cdot u_{n+2} + u_1 \cdot u_{n+1}.$$

Vi gjør følgende observasjoner.

(i) Siden $u_1 = 1$ og $u_1 = 1$, er

$$u_2 \cdot u_{n+2} + u_1 \cdot u_{n+1} = u_{n+2} + u_{n+1}.$$

(ii) Ut ifra definisjonen til sekvensen av Fibonaccitall er

$$u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1}.$$

Fra (i) – (ii) deduserer vi at utsagnet er sant.

(2) Når $k = 4$, er utsagnet at

$$u_{n+4} = u_3 \cdot u_{n+2} + u_2 \cdot u_{n+1}.$$

Vi gjør følgende obsvervasjoner.

(i) Siden $u_2 = 1$ og $u_3 = 2$, er

$$u_3 \cdot u_{n+2} + u_2 \cdot u_{n+1} = 2u_{n+2} + u_{n+1}.$$

(ii) Fra definisjonen til sekvensen av Fibonaccitall har vi:

$$u_{n+4} = u_{n+3} + u_{n+2}$$

og

$$u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1}.$$

Derfor er

$$\begin{aligned} u_{n+4} &= (u_{n+2} + u_{n+1}) + u_{n+2} \\ &= 2u_{n+2} + u_{n+1}. \end{aligned}$$

Fra (i) – (ii) deduserer vi at utsagnet er sant.

Anta nå at proposisjonen har blitt bevist når $k = m$ og når $k = m - 1$, hvor m er et gitt heltall større enn eller likt 4. Således har det blitt bevist at

$$u_{n+m} = u_{m-1} \cdot u_{n+2} + u_{m-2} \cdot u_{n+1}$$

og at

$$u_{n+m-1} = u_{m-2} \cdot u_{n+2} + u_{m-3} \cdot u_{n+1}.$$

Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Ut ifra definisjonen til sekvensen av Fibonaccitall er

$$u_{n+m+1} = u_{n+m} + u_{n+m-1}.$$

(2) Fra antakelsen at

$$u_{n+m} = u_{m-1} \cdot u_{n+2} + u_{m-2} \cdot u_{n+1}$$

og antakelsen at

$$u_{n+m-1} = u_{m-2} \cdot u_{n+2} + u_{m-3} \cdot u_{n+1}$$

følger det at

$$\begin{aligned} & u_{n+m} + u_{n+m-1} \\ &= (u_{m-1} \cdot u_{n+2} + u_{m-2} \cdot u_{n+1}) + (u_{m-2} \cdot u_{n+2} + u_{m-3} \cdot u_{n+1}) \\ &= (u_{m-1} + u_{m-2})\, u_{n+2} + (u_{m-2} + u_{m-3})\, u_{n+1} \end{aligned}$$

(3) Ut ifra definisjonen til sekvensen av Fibonaccitall har vi:

$$u_m = u_{m-1} + u_{m-2}$$

og

$$u_{m-1} = u_{m-2} + u_{m-3}.$$

Fra (1) – (3) deduserer vi at

$$u_{n+m+1} = u_m \cdot u_{n+2} + u_{m-1} \cdot u_{n+1}.$$

Dermed er proposisjonen sann når k er det naturlige tallet $m + 1$.

Ved induksjon konkluderer vi at proposisjonen er sann når k er et hvilket som helst naturlig tall større enn eller likt 3.

□

Eksempel 1.14.2. Når $n = 2$ og $k = 3$, fastslår Proposisjon 1.14.1 at

$$u_5 = u_2u_4 + u_1u_3,$$

altså at

$$5 = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2.$$

Eksempel 1.14.3. Når $n = 2$ og $k = 4$, fastslår Proposisjon 1.14.1 at

$$u_6 = u_3u_4 + u_2u_3,$$

altså at

$$8 = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2.$$

Eksempel 1.14.4. Når $n = 2$ og $k = 7$, fastslår Proposisjon 1.14.1 at

$$u_9 = u_6u_4 + u_5u_3,$$

altså at

$$34 = 28 \cdot 3 + 5 \cdot 2.$$

Eksempel 1.14.5. Når $n = 3$ og $k = 3$, fastslår Proposisjon 1.14.1 at

$$u_6 = u_2u_5 + u_1u_4,$$

altså at

$$8 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 3.$$

Eksempel 1.14.6. Når $n = 3$ og $k = 4$, fastslår Proposisjon 1.14.1 at

$$u_7 = u_3u_5 + u_2u_4,$$

altså at

$$13 = 2 \cdot 5 + 1 \cdot 3.$$

Eksempel 1.14.7. Når $n = 3$ og $k = 7$, fastslår Proposisjon 1.14.1 at

$$u_{10} = u_6u_5 + u_5u_4,$$

altså at

$$55 = 8 \cdot 5 + 5 \cdot 3.$$

Eksempel 1.14.8. Når $n = 6$ og $k = 5$, fastslår Proposisjon 1.14.1 at

$$u_{11} = u_4 u_8 + u_3 u_7,$$

altså at

$$89 = 3 \cdot 21 + 2 \cdot 13.$$

Merknad 1.14.9. I beviset for Proposisjon 1.14.1 benyttet vi varianten av induksjon hvor $c = 1$ og $r = 3$. Vi kan se på beviset for følgende måte. Først velger vi et heltall n slik at $n \geq 0$: la for eksempel n være 7. Da blir utsagnet:

$$u_{7+k} = u_{k-1} \cdot u_9 + u_{k-2} \cdot u_8.$$

Så beviser vi at dette er sant, ved å erstatte n med 7 i beviset for Proposisjon 1.14.1.

Vi begynner med å sjekke om utsagnet er sant for alle de naturlige tallene r, $r+1$, $\ldots$, $r+c$, det vil si når $k = 3$ og når $k = 4$. Vi sjekker altså at

$$u_{10} = u_2 \cdot u_9 + u_1 \cdot u_8$$

og at

$$u_{11} = u_3 u_9 + u_2 u_8.$$

Anta nå at det har blitt bevist at utsagnet er sant når $k = m$ og når $k = m - 1$, hvor m er et gitt heltall større enn eller likt 4. Således har det blitt bevist at

$$u_{7+m} = u_{m-1} \cdot u_9 + u_{m-2} \cdot u_8$$

og at

$$u_{7+m-1} = u_{m-2} \cdot u_9 + u_{m-3} \cdot u_8.$$

Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Ut ifra definisjonen til sekvensen av Fibonaccitall er

$$u_{7+m+1} = u_{7+m} + u_{6+m}.$$

(2) Fra antakelsen at

$$u_{7+m} = u_{m-1} \cdot u_9 + u_{m-2} \cdot u_8$$

og antakelsen at

$$u_{6+m} = u_{m-2} \cdot u_9 + u_{m-3} \cdot u_8$$

følger det at

$$\begin{aligned}
&u_{7+m} + u_{6+m} \\
&= (u_{m-1} \cdot u_9 + u_{m-2} \cdot u_8) + (u_{m-2} \cdot u_9 + u_{m-3} \cdot u_8) \\
&= (u_{m-1} + u_{m-2})\, u_9 + (u_{m-2} + u_{m-3})\, u_8
\end{aligned}$$

(3) Ut ifra definisjonen til sekvensen av Fibonaccitall har vi:

$$u_m = u_{m-1} + u_{m-2}$$

og

$$u_{m-1} = u_{m-2} + u_{m-3}.$$

Fra (1) – (3) deduserer vi at

$$u_{8+m} = u_m \cdot u_9 + u_{m-1} \cdot u_8.$$

Dermed er proposisjonen sann når k er det naturlige tallet $m+1$.

Ved induksjon konkluderer vi at utsagnet er sant når k er et hvilket som helst naturlig tall større enn eller likt 3.

Merknad 1.14.10. Siden ligningen

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

som definerer det n-te Fibonaccitallene inneholder *to* av Fibonaccitallene som allerede har blitt definert, benytter vi typisk varianten av induksjon hvor $c = 1$ for å bevise påstander om Fibonaccitallene:

(1) For å gjennomføre Steg (1) i Terminologi 1.13.2, sjekker vi om påstanden er sann for *to* heltall.

(2) For å gjennomføre Steg (2) i Terminologi 1.13.2, antar vi at påstanden har blitt bevist for de *to* heltallene m og $m-1$, hvor m er et gitt heltall.

Rekursjon og induksjon henger generelt sett sammen slik.

Proposisjon 1.14.11. La n være et naturlig tall. Da er $u_{5n+2} > 10^n$.

Bevis. Først sjekker vi om proposisjonen er sann når $n = 1$. I dette tilfellet er utsagnet at $u_7 > 10$. Siden $u_7 = 13$ er dette sant.

Anta nå at proposisjonen har blitt bevist når n er et gitt naturlig tall m. Således har det blitt bevist at $u_{5m+2} > 10^m$. Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Vi har:

$$u_{5(m+1)+2} = u_{5m+5+2} = u_{5m+7}.$$

(2) Ut ifra Proposisjon 1.14.1, ved å la n være $5m$, er

$$u_{5m+7} = u_6 u_{5m+2} + u_5 u_{5m+1}.$$

Siden $u_5 = 5$ og $u_6 = 8$, deduserer vi at

$$u_{5m+7} = 8u_{5m+2} + 5u_{5m+1}.$$

(3) Siden $u_{5m} < u_{5m+1}$, er

$$\begin{aligned} u_{5m} + u_{5m+1} &< u_{5m+1} + u_{5m+1} \\ &= 2u_{5m+1}. \end{aligned}$$

Derfor er

$$\begin{aligned} 2(u_{5m} + u_{5m+1}) &< 2 \cdot 2u_{5m+1} \\ &= 4u_{5m+1}. \end{aligned}$$

(4) Siden u_{5m+1}, som alle Fibonnacitallene, er større enn 0, er

$$4u_{5m+1} < 5u_{5m+1}.$$

(5) Fra (3) – (4), følger det at

$$2(u_{5m} + u_{5m+1}) < 5u_{5m+1}.$$

(6) Ut ifra definisjonen til sekvensen av Fibonaccitall, er

$$u_{5m} + u_{5m+1} = u_{5m+2}.$$

(7) Fra (5) – (6), følger det at

$$2u_{5m+2} < 5u_{5m+1}.$$

Derfor er

$$\begin{aligned} 8u_{5m+2} + 5u_{5m+1} &> 8u_{5m+2} + 2u_{5m+2} \\ &= 10u_{5m+2}. \end{aligned}$$

Fra (1), (2), og (7), følger det at

$$u_{5(m+1)+2} > 10u_{5m+2}.$$

Fra antakelsen at $u_{5m+2} > 10^m$, deduserer vi at

$$\begin{aligned} u_{5(m+1)+2} &> 10 \cdot 10^m \\ &= 10^{m+1}. \end{aligned}$$

Dermed er proposisjonen sann når n er det naturlige tallet $m + 1$.

Ved induksjon konkluderer vi at proposisjonen er sann når n er et hvilket som helst naturlig tall. □

Eksempel 1.14.12. Når $n = 2$, fastslår Proposisjon 1.14.11 at $u_{12} > 10^2 = 100$. Faktisk er $u_{12} = 144$.

Eksempel 1.14.13. Når $n = 3$, fastslår Proposisjon 1.14.11 at $u_{17} > 10^3 = 1000$.

Eksempel 1.14.14. Når $n = 7$, fastslår Proposisjon 1.14.11 at $u_{37} > 10^7 = 10000000$.

O1 Oppgaver – induksjon og rekursjon

O1.1 Oppgaver i eksamens stil

Oppgave O1.1.1. La n være et naturlig tall slik at $n \geq 2$. Bevis at $2n > n + 1$.

Oppgave O1.1.2. La n være et naturlig tall. Bevis at

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Oppgave O1.1.3. La n være et naturlig tall. Bevis at

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Oppgave O1.1.4. La x og n være naturlige tall. Bevis at

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Oppgave O1.1.5. Bevis at begge utsagnene nedenfor er gale:

(1) For alle naturlige tall m og n er $(mn)! = m! \cdot n!$.

(2) For alle naturlige tall m og n er $(m + n)! = m! + n!$.

Oppgave O1.1.6. La n være et naturlig tall slik at $n \geq 4$. Bevis at $n! > n^2$. *Tips*: Benytt Proposisjon 1.5.14 i beviset.

Oppgave O1.1.7. La n, k, og l være heltall slik at $n \geq k \geq l \geq 0$. Bevis at

$$\binom{n}{k} \cdot \binom{k}{l} = \binom{n}{l} \cdot \binom{n-l}{k-l}.$$

Tips: Induksjon behøves ikke! På hver side av ligningen, erstatt binomnialkoeffisientene med deres definisjonene, og vis at begge sidene blir like.

Oppgave O1.1.8. La n være et naturlig tall.

(1) Bevis at

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n - 1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

(2) Deduser at

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n - 1)^2 = \binom{2n+1}{3}.$$

Oppgave O1.1.9. La n være et naturlig tall slik at $n \geq 2$. Bevis at

$$\sum_{i=2}^{n} \binom{i}{2} = \binom{n+1}{3}.$$

Tips: Benytt Proposisjon 1.9.18 i beviset.

Oppgave O1.1.10. La n være et naturlig tall. La u_{n+1} være det $(n+1)$-te Fibonacci-tallet. Bevis at

$$u_1 + u_3 + \cdots + u_{2n-1} = u_{2n}.$$

Oppgave O1.1.11. La n være et naturlig tall. La u_k være det k-te Fibonnacitallet, hvor k er et hvilket som helst naturlig tall. Bevis at

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} u_i = u_{2n}.$$

Tips: Gjør følgende:

(1) La r være

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

og la s være

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Bevis at

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(r^n - s^n\right) = \frac{r^n - s^n}{r - s}.$$

Fra Proposisjon 1.12.9, deduser at

$$u_n = \frac{r^n - s^n}{r - s}.$$

(2) Bevis at

$$(1+r)^n - (1+s)^n = \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} r^i\right) - \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} s^i\right).$$

Tips: Benytt formelen i Proposisjon 1.9.30 to ganger:

(i) Ved å la x være 1 og å la y være r.

(ii) Ved å la x være 1 og å la y være s.

(3) Deduser fra (1), (2) og Proposisjon 1.12.9 at

$$\frac{(1+r)^n - (1+s)^n}{r - s} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} u_i.$$

(4) Fra Lemma 1.12.7 vet vi at $r^2 = r + 1$ og at $s^2 = s + 1$. Deduser at

$$r^{2n} - s^{2n} = (1+r)^n - (1+s)^n.$$

(5) Deduser fra (1) og (4) at

$$u_{2n} = \frac{(1+r)^n - (1+s)^n}{r-s}.$$

(6) Konkluder fra (3) og (5) at

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} u_i = u_{2n}.$$

Oppgave O1.1.12. Følgende definerer ved rekursjon *sekvensen av Lucastall.*

(1) Det første heltallet i sekvensen er 1.

(2) Det andre heltallet i sekvensen er 3.

(3) La m være et naturlig tall slik at $m \geq 2$. Anta at det i-te heltallet i sekvensen har blitt definert for alle de naturlige tallene i slik at $2 \leq i \leq m$. Betegn det m-te heltallet i sekvensen som v_m, og betegn det $(m-1)$-te heltallet i sekvensen som v_{m-1}. Da definerer vi det $(m+1)$-te heltallet i sekvensen til å være $v_{m-1} + v_m$.

Skriv de første ti heltallene i sekvensen.

Oppgave O1.1.13. La v_n betegne det n-te heltallet i sekvensen av Lucastall. Bevis at

$$v_1 + \cdots + v_n = v_{n+2} - 3.$$

Oppgave O1.1.14. La u_r betegne det r-te heltallet i sekvensen av Fibonaccitall. La v_r betegne det r-te heltallet i sekvensen av Lucastall.

(1) La n være et naturlig tall slik at $n \geq 3$. Bevis at

$$v_{n+2} + v_n = (v_{n+1} + v_{n-1}) + (v_n + v_{n-2}).$$

Tips: Induksjon behøves ikke!

(2) La n være et naturlig tall slik at $n \geq 2$. Bevis at

$$v_{n+1} + v_{n-1} = 5u_n.$$

Oppgave O1.1.15. La n være et naturlig tall slik at $n \geq 2$. La u_n være det n-te Fibonaccitallet. Bevis at u_n er lik

$$\binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \cdots + \binom{\frac{n-1}{2}}{\frac{n-1}{2}}$$

dersom n er et oddetall, og er lik

$$\binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \cdots + \binom{\frac{n}{2}}{\frac{n-2}{2}}$$

dersom n er et partall. *Tips*: Benytt en variant av induksjon, og benytt Proposisjon 1.9.18.

O1.2 Oppgaver for å hjelpe med å forstå kapittelet

Oppgave O1.2.1. Er følgende utsagn riktige eller gale ifølge Definisjon 1.1.1 og Definisjon 1.1.3?

(1) -3 er et naturlig tall.

(2) $\sqrt{9}$ er et heltall.

(3) $\frac{4}{3}$ er et heltall.

(4) $1 - 1$ er et naturlig tall.

(5) $(-3) \cdot (-4)$ er et naturlig tall.

Oppgave O1.2.2. Hva fastslår Proposisjon 1.4.5 når $n = 4$?

Oppgave O1.2.3. Fortsett med Merknad 1.4.11 ved å vise at Proposisjon 1.4.5 er sann når $n = 4$.

Oppgave O1.2.4. Hva fastslår Proposisjon 1.5.1 når $n = 4$?

Oppgave O1.2.5. Gjør det samme som i Merknad 1.4.11 for Proposisjon 1.5.1. Med andre ord, beskriv hvordan algoritmen i Merknad 1.4.3 ser ut for Proposisjon 1.5.1.

Oppgave O1.2.6. Hva fastslår Proposisjon 1.5.7 når $n = 4$?

Oppgave O1.2.7. Gjør det samme som i Merknad 1.4.11 for Proposisjon 1.5.7. Med andre ord, beskriv hvordan algoritmen i Merknad 1.4.3 ser ut for Proposisjon 1.5.7.

Oppgave O1.2.8. Hva fastslår Proposisjon 1.5.14 når $n = 5$?

Oppgave O1.2.9. Gjør det samme som i Merknad 1.4.11 for Proposisjon 1.5.14. Med andre ord, beskriv hvordan algoritmen i Bemarking 1.4.3 ser ut for Proposisjon 1.5.14.

Oppgave O1.2.10. Skriv følgende summene ved å bruke summetegnet.

(1) -9 -6 -3 + 0 + 3 + 6 + 9 + 12 + 15.

(2) $1 + 5 + 9 + 13 + \ldots + 53$.

Oppgave O1.2.11. Skriv summene

$$\sum_{i=3}^{9} 4i$$

og

$$\sum_{i=0}^{7} \left(3^i + i\right)$$

uten å bruke summetegnet.

Oppgave O1.2.12. Hva fastslår Proposisjon 1.7.1 når $n = 5$ og $k = 3$? Hva fastslår den når $n = 5$ og $k = 5$?

Oppgave O1.2.13. Skriv utsagnet i Proposisjon 1.7.1 når $k = 3$ uten å bruke summetegnet. Skriv så et bevis for dette utsagnet ved å erstatte k med 3 i beviset for Proposisjon 1.7.1, uten å bruke summetegnet. *Tips*: Se på Merknad 1.7.16.

Oppgave O1.2.14. Regn ut følgende tall.

(1) 5!

(2) 6!

Oppgave O1.2.15. Regn ut $\binom{7}{k}$ for alle heltallene k slik at $0 \leq k \leq 7$, uten å benytte Proposisjon 1.9.18.

Oppgave O1.2.16. Regn ut $\binom{7}{k}$ for alle heltallene k slik at $0 \leq k \leq 7$, uten å benytte Proposisjon 1.9.18.

Oppgave O1.2.17. Regn ut $\binom{8}{k}$ for alle heltall k slik at $0 \leq k \leq 7$, ved å benytte Proposisjon 1.9.18 og til Oppgave O1.2.16.

Oppgave O1.2.18. Gjør det samme som i Merknad 1.4.11 for Proposisjon 1.9.29. Med andre ord, beskriv hvordan algoritmen i Merknad 1.4.3 ser ut for Proposisjon 1.9.29.

Oppgave O1.2.19. Hva fastslår Proposisjon 1.9.30 når $n = 5$?

Oppgave O1.2.20. Skriv utsagnet i Proposisjon 1.9.30 når $n = 4$ uten å bruke summetegnet. Skriv så beviset for dette utsagnet uten å bruke summetegnet, ved å ertsatte m med 3 i beviset for Proposisjon 1.9.30. *Tips*: Se Merknad 1.9.36.

Oppgave O1.2.21. La n være et naturlig tall. Ved å la x være 1 og y være 1 i Proposisjon 1.9.30, bevis at

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Oppgave O1.2.22. La n være et naturlig tall. Følgende ligning kan også deduseres fra Proposisjon 1.9.30:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

Hvilke heltall bør vi la x og y være?

Oppgave O1.2.23. Hva er det 15-te Fibonaccitallet?

Oppgave O1.2.24. Hva fastslår Proposisjon 1.11.6 når $n = 5$?

Oppgave O1.2.25. Gjør det samme som i Merknad 1.4.11 for Proposisjon 1.11.6. Med andre ord, beskriv hvordan algoritmen i Bemarking 1.4.3 ser ut for Proposisjon 1.11.6.

Oppgave O1.2.26. Hva fastslår Proposisjon 1.11.12 når $n = 5$?

Oppgave O1.2.27. Gjør det samme som i Merknad 1.4.11 for Proposisjon 1.11.12. Med andre ord, beskriv hvordan algoritmen i Bemarking 1.4.3 ser ut for Proposisjon 1.11.12.

Oppgave O1.2.28. Hva fastslår Proposisjon 1.12.2 når $n = 6$?

Oppgave O1.2.29. Gjør det samme som i Merknad 1.4.11 for Proposisjon 1.12.2. Med andre ord, beskriv hvordan algoritmen i Bemarking 1.4.3 ser ut for Proposisjon 1.12.2.

Oppgave O1.2.30. Hva fastslår Proposisjon 1.12.9 når $n = 7$?

Oppgave O1.2.31. Hva fastslår Proposisjon 1.12.18 når $n = 7$?

Oppgave O1.2.32. Gi et alternativt bevis for Proposisjon 1.12.9 ved å benytte varianten av induksjon hvor $c = 1$ i Terminologi 1.13.2.

Oppgave O1.2.33. La v_n være det n-te heltallet i sekvensen av Lucastall. Bevis at

$$v_n = \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Tips: Benytt varianten av induksjon hvor $c = 1$ i Terminologi 1.13.2.

Oppgave O1.2.34. La u_n være det n-te Fibonaccitallet, og la v_n være det n-te heltallet i sekvensen av Lucastall. Bevis at

$$v_n^2 - 5u_n^2 = 4 \cdot (-1)^n,$$

ved å benytte Proposisjon 1.12.9 og Oppgave O1.2.33.

Oppgave O1.2.35. La x være et heltall. Hva fastslår Proposisjon 1.13.6 når $n = 7$? Hva fastslår den når $n = 7$ og $x = -2$?

Oppgave O1.2.36. Fortsett med Merknad 1.13.13 ved å vise at Proposisjon 1.4.5 er sann når $n = 4$.

Oppgave O1.2.37. La x være et heltall. Hva fastslår Proposisjon 1.14.1 når $n = 4$ og $k = 6$? Hva fastslår den når $n = 5$ og $k = 4$?

Oppgave O1.2.38. Skriv utsagnet i Proposisjon 1.14.1 når $n = 9$. Skriv så et bevis for dette utsagnet ved å erstatte k med 9 i beviset for Proposisjon 1.14.1. *Tips*: Se Merknad 1.14.9.

Oppgave O1.2.39. Gjør det samme som i Merknad 1.13.13 for Proposisjon 1.14.1. Med andre ord, beskriv hvordan algoritmen i Bemarking 1.13.4 ser ut for Proposisjon 1.14.1.

Oppgave O1.2.40. La n være et heltall slik at $n \geq 0$, la k være et naturlig tall slik at $k \geq 3$, og la l være et naturlig tall slik at $l \leq k - 2$. Da er

$$u_{n+k} = u_{k-l} \cdot u_{n+l+1} + u_{k-l-1} \cdot u_{n+l}.$$

Tips: Omarbeid beviset for Proposisjon 1.14.1. HUsk å sjekke om proposisjonen er sann når $k = 3$ og når $k = 4$ for alle de naturlige tallene l slik at $l \leq k - 2$. Det er ikke så mange!

Oppgave O1.2.41. Hva fastslår Proposisjon 1.14.11 når $n = 5$?

Oppgave O1.2.42. Gjør det samme som i Merknad 1.4.11 for Proposisjon 1.14.11. Med andre ord, beskriv hvordan algoritmen i Merknad 1.4.3 ser ut for Proposisjon 1.14.11.

Oppgave O1.2.43. Gi et eksempel på et naturlig tall n slik at $u_n > 1000000000000000$. Her er u_n det n-te Fibonaccitallet.