Innhold

2 Delbarhet

2.1 Absoluttverdien

Definisjon 2.1.1. La n være et heltall. Da er *absoluttverdien til* n:

(1) n dersom $n \geq 0$;

(2) $-n$ dersom $n < 0$.

Merknad 2.1.2. Med andre ord får vi absoluttverdien til n ved å fjerne minustegnet hvis $n < 0$, og ved å gjøre ingenting hvis $n > 0$.

Notasjon 2.1.3. La n være et heltall. Vi betegner absoluttverdien til n som $|n|$.

Eksempel 2.1.4. Vi har: $|3| = 3$.

Eksempel 2.1.5. Vi har: $|-3| = 3$.

Eksempel 2.1.6. Vi har: $|0| = 0$.

Eksempel 2.1.7. Vi har: $|-7| = 7$.

Eksempel 2.1.8. Vi har: $|151| = 151$.

2.2 Divisjonsalgoritmen

Merknad 2.2.1. La l og n være naturlige tall. Fra barneskolen kjenner du til at vi alltid kan finne et naturlig tall k og et naturlig tall r slik at:

(1) $n = kl + r$,

(2) $0 \leq r < l$.

Det naturlige tallet k kalles *kvotient*, og det naturlige tallet r kalles *rest*.

Eksempel 2.2.2. La n være 5, og la l være 3. Da er $k = 1$ og $r = 2$, siden vi har:

(1) $5 = 1 \cdot 3 + 2$,

(2) $0 \leq 2 < 3$.

Eksempel 2.2.3. La n være 18, og la l være 5. Da er $k = 3$ og $r = 3$, siden vi har:

(1) $18 = 3 \cdot 5 + 3$,

(2) $0 \leq 3 < 5$.

Merknad 2.2.4. På barneskolen lærte du en metode for å finne k og r. Men hvordan vet vi at metoden alltid virker? Med andre ord, hvordan vet vi at vi alltid kan finne naturlige tall k og r som oppfyller kravene (1) og (2) i Merknad 2.2.1?

I denne delen av kapittelet skal vi *bevise* ved induskjon at det finnes, for alle naturlige tall n og l, naturlige tall k og r slik at (1) og (2) i Merknad 2.2.1 er sanne. Det følgende lemmaet er kjernen i beviset for Proposisjon 2.2.6.

Lemma 2.2.5. La n være et heltall slik at $n \geq 0$. La l være et naturlig tall. Anta at det finnes et heltall k og et heltall r slik at:

(1) $n = kl + r$,

(2) $0 \leq r < l$,

(3) $k \geq 0$.

Da finnes det et heltall k' og et heltall r' slik at:

(I) $n + 1 = k'l + r'$,

(II) $0 \leq r' < l$.

(III) $k' \geq 0$.

Bevis. Siden $0 \leq r < l$, er et av de følgende utsagnene sant:

(A) $r < l - 1$;

(B) $r = l - 1$.

Vi skal gjennomføre beviset i disse to tilfellene hver for seg.

Anta først at (A) er tilfellet. La da k' være k, og la r' være $r + 1$. Vi gjør følgende observasjoner.

(i) Fra (1) har vi:

$$n + 1 = (kl + r) + 1.$$

Derfor er:

$$\begin{aligned} n + 1 &= (kl + r) + 1 \\ &= kl + (r + 1) \\ &= k'l + r'. \end{aligned}$$

Dermed oppfyller k' og r' kravet (I).

(ii) Fra (2) har vi:

$$0 \leq r.$$

Derfor er

$$\begin{aligned} 0 &\leq r \\ &\leq r + 1 \\ &= r'. \end{aligned}$$

Siden vi har antatt at (A) er sant, vet vi også at

$$r < l - 1.$$

Det følger at

$$r + 1 < l,$$

altså at

$$r' < l.$$

Dermed har vi bevist at

$$0 \leq r' < l.$$

Således oppfyller r' kravet (II).

(iii) Fra (3) har vi:

$$k \geq 0.$$

Siden $k' = k$, har vi altså:

$$k' \geq 0.$$

Dermed oppfyller k' kravet (III).

Fra (i) – (iii) konkluderer vi at lemmaet er sant i tilfellet (A).

Anta nå at (B) er tilfellet. La da k' være $k + 1$, og la r' være 0. Vi gjør følgende observasjoner.

(i) Fra (1) har vi:

$$n + 1 = (kl + r) + 1.$$

Siden vi har antatt at (B) er sant, er $r = l - 1$. Derfor er

$$\begin{aligned} n + 1 &= (kl + r) + 1 \\ &= \big(kl + (l - 1)\big) + 1 \\ &= kl + l - 1 + 1 \\ &= (k + 1)l + 0 \\ &= k'l + r'. \end{aligned}$$

Dermed oppfyller k' og r' kravet (I).

(ii) Siden l er et naturlig tall, er $0 < l$. Siden $r' = 0$, er derfor $r' < l$. I tillegg er $0 \leq 0$, altså $0 \leq r'$. Dermed er

$$0 \leq r' < l.$$

Således oppfyller r' kravet (II).

(iii) Fra (3) har vi:

$$k \geq 0.$$

Siden $k' = k + 1$, deduserer vi at

$$k' \geq 0.$$

Dermed oppfyller k' kravet (III).

Fra (i) – (iii) konkluderer vi at lemmaet er sant i tilfellet (B).

□

Proposisjon 2.2.6. La n være et heltall slik at $n \geq 0$. La l være et naturlig tall. Da finnes det et heltall k og et heltall r slik at:

(I) $n = kl + r$,

(II) $0 \leq r < l$,

(III) $k \geq 0$.

Bevis. Først sjekker vi at proposisjonen er sann når $n = 0$. I dette tilfellet er utsagnet at det finnes, for et hvilket som helst naturlig tall l, et heltall k og et heltall r slik at:

(1) $0 = kl + r$

(2) $0 \leq r < l$,

(3) $k \geq 0$.

La k være 0, og la r være 0. Vi gjør følgende observasjoner.

(i) Vi har:

$$\begin{aligned} kl + r &= 0 \cdot l + 0 \\ &= 0 + 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dermed oppfyller k og r kravet (1).

(ii) Siden l er et naturlig tall, er $0 < l$. Siden $r = 0$, er derfor $r < l$. I tillegg er $0 \leq 0$, altså $0 \leq r$. Dermed er

$$0 \leq r < l.$$

Således oppfyller r kravet (2).

(iii) Vi har: $0 \geq 0$. Siden $k = 0$, er derfor $k \geq 0$. Dermed oppfyller k kravet (3).

Fra (i) – (iii) konkluderer vi at utsagnet er sant.

Anta nå at proposisjonen har blitt bevist når n er et gitt helltall m slik at $m \geq 0$. Således har det blitt bevist at det finnes, for et hvilket som helst naturlig tall l, et heltall k og et heltall r slik at:

(1) $m = kl + r$,

(2) $0 \leq r < l$,

(3) $k \geq 0$.

Da følger det fra Lemma 2.2.5 at det finnes et heltall k' og et heltall r' slik at:

(1) $m + 1 = k'l + r'$,

(2) $0 \leq r' < l$,

(3) $k' \geq 0$.

Dermed er proposisjonen sann når $n = m + 1$.

Ved induksjon konkluderer vi at proposisjonen er sann når n er et hvilket som helst naturlig tall. □

Terminologi 2.2.7. I Merknad 1.4.3 så vi at induksjon gir en algoritme for å konstruere et bevis for en matematisk påstand. Således gir beviset for Proposisjon 2.2.6 en algoritme for å finne k og r. Denne algoritmen kalles noen ganger *divisjonsalgoritmen*.

Eksempel 2.2.8. La oss se hvordan divisjonsalgoritmen ser ut når $n = 3$ og $l = 2$.

(1) Vi begynner med å observere at:

$$0 = 0 \cdot 2 + 0.$$

(2) Som i beviset for Lemma 2.2.5 i tilfellet (A), observerer vi at det følger at

$$1 = 0 \cdot 2 + 1.$$

(3) Som i beviset for Lemma 2.2.5 i tilfellet (B), observerer vi at det følger at

$$2 = 1 \cdot 2 + 0.$$

(4) Som i beviset for Lemma 2.2.5 i tilfellet (A), observerer vi at det følger at

$$3 = 1 \cdot 2 + 1.$$

Dermed er $k = 1$ og $r = 1$.

Eksempel 2.2.9. La oss se hvordan divisjonsalgoritmen ser ut når $n = 6$ og $l = 4$.

(1) Vi begynner med å observere at:

$$0 = 0 \cdot 4 + 0.$$

(2) Som i beviset for Lemma 2.2.5 i tilfellet (A), observerer vi at det følger at

$$1 = 0 \cdot 4 + 1.$$

(3) Som i beviset for Lemma 2.2.5 i tilfellet (A), observerer vi at det følger at

$$2 = 0 \cdot 4 + 2.$$

(4) Som i beviset for Lemma 2.2.5 i tilfellet (A), observerer vi at det følger at

$$3 = 0 \cdot 4 + 3.$$

(5) Som i beviset for Lemma 2.2.5 i tilfellet (B), observerer vi at det følger at

$$4 = 1 \cdot 4 + 0.$$

(6) Som i beviset for Lemma 2.2.5 i tilfellet (A), observerer vi at det følger at

$$5 = 1 \cdot 4 + 1.$$

(7) Som i beviset for Lemma 2.2.5 i tilfellet (A), observerer vi at det følger at

$$6 = 1 \cdot 4 + 2.$$

Dermed er $k = 1$ og $r = 2$.

Eksempel 2.2.10. La oss se hvordan divisjonsalgoritmen ser ut når $n = 7$ og $l = 3$.

(1) Vi begynner med å observere at:

$$0 = 0 \cdot 3 + 0.$$

(2) Som i beviset for Lemma 2.2.5 i tilfellet (A), observerer vi at det følger at

$$1 = 0 \cdot 3 + 1.$$

(3) Som i beviset for Lemma 2.2.5 i tilfellet (A), observerer vi at det følger at

$$2 = 0 \cdot 3 + 2.$$

(4) Som i beviset for Lemma 2.2.5 i tilfellet (B), observerer vi at det følger at

$$3 = 1 \cdot 3 + 0.$$

(5) Som i beviset for Lemma 2.2.5 i tilfellet (A), observerer vi at det følger at

$$4 = 1 \cdot 3 + 1.$$

(6) Som i beviset for Lemma 2.2.5 i tilfellet (A), observerer vi at det følger at

$$5 = 1 \cdot 3 + 2.$$

(7) Som i beviset for Lemma 2.2.5 i tilfellet (B), observerer vi at det følger at

$$6 = 2 \cdot 3 + 0.$$

(8) Som i beviset for Lemma 2.2.5 i tilfellet (A), observerer vi at det følger at

$$7 = 2 \cdot 3 + 1.$$

Dermed er $k = 2$ og $r = 1$.

Korollar 2.2.11. La n være et heltall. La l være et heltall slik at $l \neq 0$. Da finnes det et heltall k og et heltall r slik at:

(I) $n = kl + r$,

(II) $0 \leq r < |l|$.

Bevis. Ett av følgende utsagn er sant:

(A) $l > 0$ og $n \geq 0$;

(B) $l < 0$ og $n \geq 0$;

(C) $l > 0$ og $n < 0$;

(D) $l < 0$ og $n < 0$;

Anta først at (A) er tilfellet. Da er l et naturlig tall. Det følger fra Proposisjon 2.2.6 at det finnes et heltall k' og et heltall r' slik at:

(i) $n = k'l + r'$,

(ii) $0 \leq r' < l$.

Siden $|l| = l$, deduserer vi at proposisjonen er sann i dette tilfellet, ved å la k være k' og å la r være r'.

Anta nå at (B) er tilfellet. Da er $-l$ et naturlig tall. Det følger fra Proposisjon 2.2.6 at det finnes et heltall k' og et heltall r' slik at:

(i) $n = k' \cdot (-l) + r'$,

(ii) $0 \leq r' < -l$.

Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Det følger fra (i) at
$$n = (-k') \cdot l + r'.$$

(2) Vi har: $|l| = -l$. Derfor følger det fra (ii) at
$$0 \leq r' < |l|\,.$$

Dermed er proposisjonen sann i dette tilfellet også, ved å la k være $-k'$ og å la r være r'.

Anta nå at (C) er tilfellet. Da er $-n \geq 0$. Det følger fra Proposisjon 2.2.6 at det finnes et heltall k' og et heltall r' slik at:

(i) $-n = k' \cdot l + r'$,

(ii) $0 \leq r' < l$.

Ett av følgende utsagn er sant.

(a) $r' = 0$.

(b) $0 < r' < l$.

Anta først at $r' = 0$. Det følger fra (i) at
$$n = (-k') \cdot l.$$

Dermed er proposisjonen sann i dette tilfellet, ved å la k være k', og å la r være 0.

Anta nå at $0 < r' < l$. Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Det følger fra (i) at
$$\begin{aligned} n &= -k' \cdot l - r' \\ &= -k' \cdot l - l + l - r' \\ &= (-k' - 1) \cdot l + (l - r'). \end{aligned}$$

(2) Siden $0 < r' < l$, er $0 < l - r' < l$.

Dermed er proposisjonen sann i dette tilfellet også, ved å la k være $-k' - 1$, og å la r være $l - r'$. Således har vi bevist at proposisjonen er sann i tilfellet (C).

Anta nå at (D) er tilfellet. Da er $-n \geq 0$. I tillegg er $-l$ et naturlig tall. Det følger fra Proposisjon 2.2.6 at det finnes et heltall k' og et heltall r' slik at:

(i) $-n = k' \cdot (-l) + r'$,

(ii) $0 \leq r' < -l$.

Ett av følgende utsagn er sant.

(a) $r' = 0$.

(b) $0 < r' < -l$.

Anta først at $r' = 0$. Det følger fra (i) at

$$n = k' \cdot l.$$

I tillegg har vi: $|l| = -l$. Dermed er proposisjonen sann i dette tilfellet, ved å la k være k', og å la r være 0.

Anta nå at $0 < r' < -l$. Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Det følger fra (i) at

$$\begin{aligned} n &= k' \cdot l - r' \\ &= k' \cdot l + l - l - r' \\ &= (k' + 1) \cdot l + (-l - r'). \end{aligned}$$

(2) Siden $0 < r' < -l$, er $0 < -l - r' < -l$.

(3) Vi har: $|l| = -l$. Derfor følger det fra (2) at

$$0 < -l - r' < |l|.$$

Fra (1) og (3) konkluderer vi at proposisjonen er sann i dette tilfellet også, ved å la k være $k' + 1$, og å la r være $-l - r'$. Således har vi bevist at proposisjonen er sann i tilfellet (D).

□

Eksempel 2.2.12. La $n = -5$, og la l være 2. For å få heltall k og r slik at

$$-5 = k \cdot 2 + r$$

og $0 \leq r < 2$, fastslår beviset for Korollar 2.2.11 at vi kan gjøre følgende.

(1) Benytt divisjonsalgoritmen i tilfellet $n = 5$ og $l = 2$. Vi hopper over detaljene. Resultatet er:

$$5 = 2 \cdot 2 + 1.$$

(2) Observer at det følger fra (1) at

$$\begin{aligned}-5 &= -2 \cdot 2 - 1 \\ &= -2 \cdot 2 - 2 + 2 - 1 \\ &= (-2 - 1) \cdot 2 + (2 - 1) \\ &= (-3) \cdot 2 + 1.\end{aligned}$$

Dermed er

$$-5 = (-3) \cdot 2 + 1,$$

og $0 \leq 1 < 2$. Således er $k = -3$ og $r = 1$.

Eksempel 2.2.13. La $n = 8$, og la l være -3. For å få heltall k og r slik at

$$8 = k \cdot (-3) + r$$

og $0 \leq r < 3$, fastslår beviset for Korollar 2.2.11 at vi kan gjøre følgende.

(1) Benytt divisjonsalgoritmen i tilfellet $n = 8$ og $l = 3$. Vi hopper over detaljene. Resultatet er:

$$8 = 2 \cdot 3 + 2.$$

(2) Observer at det følger fra (1) at

$$8 = (-2) \cdot (-3) + 2.$$

I tillegg er $0 \leq 2 < 3$. Således er $k = -2$ og $r = 2$.

Eksempel 2.2.14. La $n = -7$, og la l være -4. For å få heltall k og r slik at

$$-7 = k \cdot (-4) + r$$

og $0 \leq r < 4$, fastslår beviset for Korollar 2.2.11 at vi kan gjøre følgende.

(1) Benytt divisjonsalgoritmen i tilfellet $n = 7$ og $l = 4$. Vi hopper over detaljene. Resultatet er:

$$7 = 1 \cdot 4 + 3.$$

(2) Observer at det følger fra (1) at

$$\begin{aligned}-7 &= 1 \cdot (-4) - 3 \\ &= 1 \cdot (-4) + (-4) - (-4) - 3 \\ &= (1 + 1) \cdot (-4) + (4 - 3) \\ &= 2 \cdot (-4) + 1.\end{aligned}$$

Dermed er

$$-7 = 2 \cdot (-4) + 1,$$

og $0 \leq 1 < 4$. Således er $k = 2$ og $r = 1$.

Proposisjon 2.2.15. La n være et heltall. La l være et naturlig tall. La k og r være heltall slik at:

(I) $n = kl + r$,

(II) $0 \leq r < l$.

La k' og r' også være heltall slik at:

(III) $n = k'l + r'$,

(IV) $0 \leq r' < l$.

Da er $k = k'$ og $r = r'$.

Bevis. Anta først at $k \geq k'$. Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Fra (I) og (III) har vi:

$$\begin{aligned} r' - r &= (n - k'l) - (n - kl) \\ &= n - n - k'l + kl \\ &= kl - k'l \\ &= (k - k')l. \end{aligned}$$

(2) Fra (II) har vi: $0 \leq r$. Derfor er $-r \leq 0$. Det følger at $r' - r \leq r'$.

(3) Fra (IV) har vi: $r' < l$.

(4) Det følger fra (2) og (3) at

$$\begin{aligned} r' - r &\leq r' \\ &< l. \end{aligned}$$

Dermed er $r' - r < l$.

(5) Fra (1) og (4) har vi:

$$\begin{aligned} (k - k')l &= r' - r \\ &< l. \end{aligned}$$

Dermed er $(k - k')l < l$. Derfor er $k - k' < 1$.

(6) Siden $k \geq k'$, er $k - k' \geq 0$.

(7) Siden k og k' er heltall, er $k - k'$ et heltall.

(8) Fra (5) – (7) har vi: $k - k'$ er et heltall og
$$0 \leq k - k' < 1.$$
Derfor er $k - k' = 0$. Vi deduserer at $k = k'$.

(9) Det følger fra (1) og (8) at
$$\begin{aligned} r' - r &= (k - k')l \\ &= 0 \cdot l \\ &= 0. \end{aligned}$$
Vi deduserer at $r = r'$.

Anta nå at $k < k'$, altså at $k' \geq k$. Da gjennomfører vi akkurat det samme argumentet ved å bytte om k og k' og å bytte om r og r'.

□

Merknad 2.2.16. La k og r være de heltallene vi får ved å benytte divisjonsalgoritmen. Proposisjon 2.2.15 fastslår at k og r er de *entydige* heltallene, det vil si de *eneste* heltallene, som oppfyller kravene (I) – (II) i Proposisjon 2.2.6.

Merknad 2.2.17. I praksis *må* vi ikke benytte divisjonsalgoritmen for å finne k og r. Faktisk kommer vi fortere til k og r ved å benytte metoden du lærte på barneskolen! Vi kan også godt prøve å gjette k og r, og sjekke om gjetningen er riktig. Proposisjon 2.2.15 fastslår at uansett hvordan vi kommer fram til k og r, får vi de samme heltallene som ved å benytte divisjonsalgoritmen.

Dette er et avgjørende poeng. Proposisjon 2.2.6 sier noe om *eksistensen* av heltallene k og r, mens Proposisjon 2.2.15 sier noe om *entydigheten* av k og r. Den beste måten å bevise teoretisk at en matematisk påstand er sann er ikke nødvendigvis den beste å gjennomføre i praksis. Den beste situasjonen er at vi har, som her, en proposisjon som garanterer at alle metoder er like verdige.

Eksempel 2.2.18. La n være 64, og la l være 17. Siden
$$64 = 3 \cdot 17 + 13,$$
fastslår Proposisjon 2.2.15 at vi får $k = 3$ og $r = 13$ ved å bruke divisjonsalgoritmen som i Eksempel 2.2.8 – Eksempel 2.2.10.

Eksempel 2.2.19. La n være 127, og la l være 23. Siden
$$127 = 5 \cdot 23 + 12,$$
fastslår Proposisjon 2.2.15 at vi får $k = 5$ og $r = 12$ ved å bruke divisjonsalgoritmen som i Eksempel 2.2.8 – Eksempel 2.2.10.

Korollar 2.2.20. La n være et heltall. La l være et heltall slik at $l \neq 0$. La k og r være heltall slik at:

(I) $n = kl + r$,

(II) $0 \leq r < |l|$,

La k' og r' også være heltall slik at:

(III) $n = k'l + r'$,

(IV) $0 \leq r' < |l|$.

Da er $k = k'$ og $r = r'$.

Bevis. Ett av følgende utsagn er sant:

(1) $l > 0$;

(2) $l < 0$.

Anta først at $l > 0$. Da er l et naturlig tall, og $|l| = l$. Derfor følger det fra Proposisjon 2.2.15 at $k = k'$ og $r = r'$.

Anta nå at $l < 0$. Da er $-l$ et naturlig tall, og $|l| = -l$. Derfor følger det fra Proposisjon 2.2.15 for heltallet n og det naturlige tallet $-l$ at $k = k'$ og $r = r'$.

□

Merknad 2.2.21. Korollar 2.2.20 fastslår at uansett hvordan vi kommer fram til k og r, får vi de samme heltallene som ved å benytte tilnærmingsmetoden i Eksempel 2.2.12 – 2.2.14. Sammenlign med Merknad 2.2.17.

Eksempel 2.2.22. La n være -33, og la l være 12. Siden

$$-33 = -3 \cdot 12 + 3,$$

fastslår Korollar 2.2.20 at vi får $k = -33$ og $r = 3$ ved å bruke tilsnærmingsmetoden i Eksempel 2.2.12 – 2.2.14.

Eksempel 2.2.23. La n være 25, og la l være -7. Siden

$$25 = -3 \cdot -7 + 4,$$

fastslår Korollar 2.2.20 at vi får $k = -3$ og $r = 4$ ved å bruke tilsnærmingsmetoden i Eksempel 2.2.12 – 2.2.14.

Eksempel 2.2.24. La n være -156, og la l være -38. Siden

$$-156 = 5 \cdot -38 + 34,$$

fastslår Korollar 2.2.20 at vi får $k = 5$ og $r = 34$ ved å bruke tilsnærmingsmetoden i Eksempel 2.2.12 – 2.2.14.

Proposisjon 2.2.25. La m og n være heltall. La l være et heltall slik at $l \neq 0$. Anta at $lm = ln$. Da er $m = n$.

Bevis. Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Siden $lm = ln$, er
$$0 = lm - ln,$$
altså
$$0 = (m - n) \cdot l$$

(2) Vi har:
$$0 = 0 \cdot l.$$

Fra (1), (2), og Korollar 2.2.20 følger det at
$$m - n = 0,$$
altså at $m = n$.

□

Merknad 2.2.26. Vi er vant til å kunne fjerne l fra begge sider av ligningen
$$lm = ln.$$
Proposisjon 2.2.25 fastslår formelt at dette er en gyldig algebraisk manipulasjon.

Er det ikke nok å si: «vi deler begge sider av ligningen med l»? Jo, men hva mener vi egentlig med dette? Poenget med Proposisjon 2.2.25 er at Korollar 2.2.20 gir oss muligheten til formelt å gjennomføre argumentene vi hadde kommet fram til om vi funderte på dette spørsmålet.

2.3 Partall og oddetall

Terminologi 2.3.1. Ved å la l være 2 i Korollar 2.2.11, får vi at, for et hvilket som helst heltall n, det finnes et heltall k slik at enten $n = 2k$ eller $n = 2k + 1$.

(1) Dersom $n = 2k$, sier vi at n er et *partall*.

(2) Dersom $n = 2k + 1$, sier vi at n er et *oddetall*.

Merknad 2.3.2. Det følger fra Proposisjon 2.2.15 at et heltall ikke kan være både et partall og et oddetall!

Eksempel 2.3.3. Siden $57 = 2 \cdot 28 + 1$, er 57 et oddetall.

Eksempel 2.3.4. Siden $26 = 2 \cdot 13$, er 26 et partall.

Eksempel 2.3.5. Siden $-3 = 2 \cdot (-2) + 1$, er -3 et oddetall.

2.4 Eksempler på bevis som benytter divisjonsalgoritmen

Merknad 2.4.1. La n være et heltall, og la l være heltall slik at $l \neq 0$. Korollar 2.2.11 sier at det finnes et heltall k slik at n er lik et av de følgende heltallene: kl, $kl+1$, $kl+2$, $\ldots$, $kl+|l|-1$. Når l er for eksempel 5, fastslår korollaret at, for alle heltall n, det finnes et heltall k slik at n er lik et av de følgende heltallene: $5k$, $5k+1$, $5k+2$, $5k+3$, $5k+4$.

For å bevise en matematisk påstand om heltall, kan vi derfor:

(1) velge et heltall l;

(2) sjekke om påstanden er sann, for alle heltall k, i hvert av de følgende tilfellene: $n = kl$, $n = kl + 1$, $n = kl + 2$, $\ldots$, $n = kl + |l| - 1$.

Vi skal nå se på noen eksempler hvor denne tilnærmingsmetoden benyttes.

Proposisjon 2.4.2. La n være et heltall. Da finnes det et heltall m slik at enten $n^2 = 4m$ eller $n^2 = 4m + 1$.

Bevis. Ved å la l være 2 i Korollar 2.2.11, får vi at det finnes et heltall k slik at ett av følgende utsagn er sant:

(1) $n = 2k$,

(2) $n = 2k + 1$.

Anta først at (1) er sant. La m være k^2. Da er

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k)^2 \\ &= 4k^2 \\ &= 4m. \end{aligned}$$

Dermed er proposisjonen sann i dette tilfellet.

Anta nå at (2) er sant. La m være $k^2 + k$. Da er

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 4(k^2 + k) + 1 \\ &= 4m + 1. \end{aligned}$$

Dermed er proposisjonen sann i dette tilfellet også.

□

Eksempel 2.4.3. Når $n = 3$, fastslår Proposisjon 2.4.2 at det finnes et heltall m slik at enten $3^2 = 4m$ eller $3^2 = 4m + 1$, altså slik at enten $9 = 4m$ eller $9 = 4m + 1$. Det er nemlig sant at $9 = 4 \cdot 2 + 1$.

Eksempel 2.4.4. Når $n = 6$, fastslår Proposisjon 2.4.2 at det finnes et heltall m slik at enten $6^2 = 4m$ eller $6^2 = 4m + 1$, altså slik at enten $36 = 4m$ eller $36 = 4m + 1$. Det er nemlig sant at $36 = 4 \cdot 9$.

Eksempel 2.4.5. Når $n = 57$, fastslår Proposisjon 2.4.2 at det finnes et heltall m slik at enten $57^2 = 4m$ eller $57^2 = 4m+1$, altså slik at enten $3249 = 4m$ eller $3249 = 4m+1$. Det er nemlig sant at $3249 = 4 \cdot 812 + 1$.

Eksempel 2.4.6. Når $n = -6$, faststlår Proposisjon 2.4.2 at det finnes et heltall m slik at enten $(-6)^2 = 4m$ eller $(-6)^2 = 4m+1$, altså slik at enten $36 = 4m$ eller $36 = 4m+1$. Det er nemlig sant at $36 = 4 \cdot 9$.

Eksempel 2.4.7. Når $n = -7$, faststlår Proposisjon 2.4.2 at det finnes et heltall m slik at enten $(-7)^2 = 4m$ eller $(-7)^2 = 4m+1$, altså slik at enten $49 = 4m$ eller $49 = 4m+1$. Det er nemlig sant at $49 = 4 \cdot 12 + 1$.

Merknad 2.4.8. For å oppsummere beviset for Proposisjon 2.4.2, delte vi det opp i to tilfeller:

(1) hvor n er et partall;

(2) hvor n er et oddetall.

Vi beviste at Proposisjon 2.4.2 er sann i disse to tilfellene hver for seg.

Proposisjon 2.4.9. La n være et oddetall. Da finnes det et heltall m slik at $n^2 = 8m+1$.

Bevis. Ved å la l være 4 i Korollar 2.2.11, får vi at det finnes et heltall k slik at ett av følgende utsagn er sant:

(1) $n = 4k$,

(2) $n = 4k + 1$,

(3) $n = 4k + 2$,

(4) $n = 4k + 3$.

Siden n er et oddetall, må faktisk enten (2) eller (4) være sant.

Anta først at (2) er sant. La m være $2k^2 + k$. Da er

$$\begin{aligned} n^2 &= (4k+1)^2 \\ &= 16k^2 + 8k + 1 \\ &= 8\left(2k^2 + k\right) + 1 \\ &= 8m + 1. \end{aligned}$$

Dermed er proposisjonen sann i dette tilfellet.

Anta nå at (4) er sant. La m være $2k^2 + 3k + 1$. Da er

$$\begin{aligned} n^2 &= (4k+3)^2 \\ &= 16k^2 + 24k + 9 \\ &= \left(16k^2 + 24k + 8\right) + 1 \\ &= 8\left(2k^2 + 3k + 1\right) + 1 \\ &= 8m + 1. \end{aligned}$$

Dermed er proposisjonen sann i dette tilfellet også.

□

Eksempel 2.4.10. Når $n = 5$, fastslår Proposisjon 2.4.9 at det finnes et heltall m slik at $5^2 = 8m + 1$, altså slik at $25 = 8m + 1$. Det er nemlig sant at $25 = 8 \cdot 3 + 1$.

Eksempel 2.4.11. Når $n = 9$, fastslår Proposisjon 2.4.9 at det finnes et heltall m slik at $9^2 = 8m + 1$, altså slik at $81 = 8m + 1$. Det er nemlig sant at $81 = 8 \cdot 10 + 1$.

Eksempel 2.4.12. Når $n = 57$, fastslår Proposisjon 2.4.9 at det finnes et heltall m slik at $57^2 = 8m + 1$, altså slik at $3249 = 8m + 1$. Det er nemlig sant at $3249 = 8 \cdot 406 + 1$.

Eksempel 2.4.13. Når $n = -7$, fastslår Proposisjon 2.4.9 at det finnes et heltall m slik at $(-7)^2 = 8m + 1$, altså slik at $49 = 8m + 1$. Det er nemlig sant at $49 = 8 \cdot 6 + 1$.

Eksempel 2.4.14. Når $n = -11$, fastslår Proposisjon 2.4.9 at det finnes et heltall m slik at $(-11)^2 = 8m+1$, altså slik at enten $121 = 8m+1$. Det er nemlig sant at $121 = 8 \cdot 15+1$.

Merknad 2.4.15. Utsagnet i Proposisjon 2.4.9 er gal når n er et partall, siden n^2 er et partall om n er et partall, men $8m + 1$ er et oddetall for alle heltall m. Et riktig utsagn er at det finnes et heltall m slik at enten $n^2 = 8m$ eller $n^2 = 8m + 4$ når n er et partall.

Proposisjon 2.4.16. La n være et heltall. Da finnes det et heltall m slik at ett av følgende utsagn er sant:

(1) $n^3 = 9m$

(2) $n^3 = 9m + 1$

(3) $n^3 = 9m + 8$.

Bevis. Ved å la l være 3 i Korollar 2.2.11, får vi at det finnes et heltall q slik at ett av følgende utsagn er sant:

(1) $n = 3k$,

(2) $n = 3k + 1$,

(3) $n = 3k + 2$.

Anta først at (1) er sant. La m være $3k^3$. Da er

$$\begin{aligned} n^3 &= (3k)^3 \\ &= 27k^3 \\ &= 9 \cdot (3k^3) \\ &= 9m. \end{aligned}$$

Dermed er proposisjonen sann i dette tilfellet.

Anta nå at (2) er sant. La m være $3k^3 + 3k^2 + k$. Ut ifra Proposisjon 1.9.30 er

$$\begin{aligned} (3k+1)^3 &= \binom{3}{0} \cdot (3k)^3 \cdot 1^0 + \binom{3}{1} \cdot (3k)^2 \cdot 1^1 + \binom{3}{2} \cdot (3k)^1 \cdot 1^2 + \binom{3}{3} \cdot (3k)^0 \cdot 1^3 \\ &= (3k)^3 + 3 \cdot (3k)^2 + 3 \cdot (3k) + 1 \\ &= 3^3 \cdot k^3 + 3^3 \cdot k^2 + 3^2 \cdot k + 1. \end{aligned}$$

Derfor er

$$\begin{aligned} n^3 &= (3k+1)^3 \\ &= 3^3 \cdot k^3 + 3^3 \cdot k^2 + 3^2 \cdot k + 1 \\ &= (3^2) \cdot \left(3k^3 + 3k^2 + k\right) + 1 \\ &= 9m + 1. \end{aligned}$$

Dermed er proposisjonen sann i dette tilfellet.

Anta nå at (3) er sant. La m være $3k^3 + 6k^2 + 4k$. Ut ifra Proposisjon 1.9.30 er

$$\begin{aligned} (3k+2)^3 &= \binom{3}{0} \cdot (3k)^3 \cdot 2^0 + \binom{3}{1} \cdot (3k)^2 \cdot 2^1 + \binom{3}{2} \cdot (3k)^1 \cdot 2^2 + \binom{3}{3} \cdot (3k)^0 \cdot 2^3 \\ &= (3k)^3 + 3 \cdot (3k)^2 \cdot 2 + 3 \cdot (3k) \cdot 2^2 + 2^3 \\ &= 3^3 \cdot k^3 + 3^3 \cdot 2 \cdot k^2 + 3^2 \cdot 4 \cdot k + 8. \end{aligned}$$

Derfor er

$$\begin{aligned} n^3 &= (3k+2)^3 \\ &= 3^3 \cdot k^3 + 3^3 \cdot 2 \cdot k^2 + 3^2 \cdot 4 \cdot k + 8 \\ &= (3^2) \cdot \left(3k^3 + 3 \cdot 2 \cdot k^2 + 4k\right) + 8 \\ &= 9\left(3k^3 + 6k^2 + 4k\right) + 8 \\ &= 9m + 8. \end{aligned}$$

Dermed er proposisjonen sann i dette tilfellet også.

□

Eksempel 2.4.17. Når $n = 4$, fastslår Proposisjon 2.4.16 at det finnes et heltall m slik at ett av følgende utsagn er sant:

(1) $4^3 = 9m$, altså $64 = 9m$;

(2) $4^3 = 9m + 1$, altså $64 = 9m + 1$;

(3) $4^3 = 9m + 8$, altså $64 = 9m + 8$;

Det er nemlig sant at $84 = 9 \cdot 7 + 1$.

Eksempel 2.4.18. Når $n = 11$, fastslår Proposisjon 2.4.16 at det finnes et heltall m slik at ett av følgende utsagn er sant:

(1) $11^3 = 9m$, altså $1331 = 9m$;

(2) $11^3 = 9m + 1$, altså $1331 = 9m + 1$;

(3) $11^3 = 9m + 8$, altså $1331 = 9m + 8$.

Det er nemlig sant at $1331 = 9 \cdot 147 + 8$.

Eksempel 2.4.19. Når $n = 57$, fastslår Proposisjon 2.4.16 at det finnes et heltall m slik at ett av følgende utsagn er sant:

(1) $57^3 = 9m$, altså $185193 = 9m$;

(2) $57^3 = 9m + 1$, altså $185193 = 9m + 1$;

(3) $57^3 = 9m + 8$, altså $185193 = 9m + 8$.

Det er nemlig sant at $185193 = 9 \cdot 20557$.

Eksempel 2.4.20. Når $n = -7$, fastslår Proposisjon 2.4.16 at det finnes et heltall m slik at ett av følgende utsagn er sant:

(1) $(-7)^3 = 9m$, altså $-343 = 9m$;

(2) $(-7)^3 = 9m + 1$, altså $-343 = 9m + 1$;

(3) $(-7)^3 = 9m + 8$, altså $-343 = 9m + 8$;

Det er nemlig sant at $-343 = 9 \cdot (-39) + 8$.

Eksempel 2.4.21. Når $n = -8$, fastslår Proposisjon 2.4.16 at det finnes et heltall m slik at ett av følgende utsagn er sant:

(1) $(-8)^3 = 9m$, altså $-512 = 9m$;

(2) $(-8)^3 = 9m + 1$, altså $-512 = 9m + 1$;

(3) $(-8)^3 = 9m + 8$, altså $-512 = 9m + 8$.

Det er nemlig sant at $-512 = 9 \cdot (-57) + 1$.

Eksempel 2.4.22. Når $n = -12$, fastslår Proposisjon 2.4.16 at det finnes et heltall m slik at ett av følgende utsagn er sant:

(1) $(-12)^3 = 9m$, altså $-1728 = 9m$;

(2) $(-12)^3 = 9m + 1$, altså $-1728 = 9m + 1$;

(3) $(-12)^3 = 9m + 8$, altså $-1728 = 9m + 8$.

Det er nemlig sant at $-1728 = 9 \cdot (-192)$.

2.5 Grunnleggende proposisjoner om delbarhet

Definisjon 2.5.1. La l og n være heltall. Da er n *delelig med* l dersom det finnes et heltall k slik at $n = kl$.

Notasjon 2.5.2. La l og n være heltall. Dersom n er delelig med l, skriver vi $l \mid n$.

Terminologi 2.5.3. La l og n være heltall. Dersom n er delelig med l, sier vi at l er en *divisor* til n.

Eksempel 2.5.4. Siden $6 = 3 \cdot 2$, er 6 delelig med 2. Derfor skriver vi: $2 \mid 6$.

Eksempel 2.5.5. Siden $16 = 4 \cdot 4$, er 16 delelig med 4. Derfor skriver vi: $4 \mid 16$.

Eksempel 2.5.6. Siden $-15 = (-5) \cdot 3$, er -15 delelig med 3. Derfor skriver vi: $3 \mid -15$.

Eksempel 2.5.7. La n være et hvilket som helst naturlig tall. Siden $n = n \cdot 1$, er n delelig med 1. Derfor skriver vi: $1 \mid n$.

Merknad 2.5.8. La l og n være heltall. Fra Korollar 2.2.11 vet vi at det alltid er et heltall k og et heltall r slik at:

(I) $n = kl + r$,

(II) $0 \leq r < |l|$.

Anta at n er delelig med l, altså at det finnes et heltall k' slik at $n = k'l$. Da følger det fra Proposisjon 2.2.15 at $k = k'$ og at $r = 0$.

Hvis på en annen side $r > 0$, følger det fra Proposisjon 2.2.15 at n ikke er delelig med l.

Proposisjon 2.5.9. La l og n være heltall. Anta at $l \mid n$. Da er $-l \mid n$.

Bevis. Siden $l \mid n$, finnes det et heltall k slik at $n = kl$. Da er $n = (-k) \cdot (-l)$. Siden k er et heltall, er $-k$ et heltall. Vi konkluderer at $-l \mid n$. □

Eksempel 2.5.10. Siden $6 = 2 \cdot 3$, er $3 \mid 6$. Derfor er $-3 \mid 6$. Vi har: $6 = (-2) \cdot (-3)$.

Eksempel 2.5.11. Siden $-14 = 2 \cdot -7$, er $-7 \mid -14$. Derfor er $7 \mid -14$. Vi har: $-14 = (-2) \cdot 7$.

Proposisjon 2.5.12. La l og n være heltall. Anta at $l \mid n$. Da er $l \mid -n$.

Bevis. Oppgave O2.1.5. □

Eksempel 2.5.13. Siden $20 = 4 \cdot 5$, er $5 \mid 20$. Derfor er $5 \mid -20$. Vi har: $-20 = (-4) \cdot 5$.

Eksempel 2.5.14. Siden $-33 = (-11) \cdot 3$, er $3 \mid -33$. Derfor er $3 \mid 33$. Vi har: $33 = 11 \cdot 3$.

Proposisjon 2.5.15. La l, l', n, og n' være heltall. Anta at $l \mid n$ og $l' \mid n'$. Da er $l \cdot l' \mid n \cdot n'$.

Bevis. Oppgave O2.1.6. □

Eksempel 2.5.16. Siden $18 = 3 \cdot 6$ er $6 \mid 18$. Siden $56 = 14 \cdot 4$ er $4 \mid 56$. Derfor er $6 \cdot 4 \mid 18 \cdot 56$, altså $24 \mid 1008$. Vi har: $1008 = 42 \cdot 24$.

Eksempel 2.5.17. Siden $-15 = 5 \cdot (-3)$ er $-3 \mid -15$. Siden $-100 = (-10) \cdot 10$ er $10 \mid -100$. Derfor er $-3 \cdot 10 \mid (-15) \cdot (-100)$, altså $-30 \mid 1500$. Vi har: $1500 = (-50) \cdot (-30)$.

Korollar 2.5.18. La l', n, og n' være heltall. Anta at $l' \mid n'$. Da er $l' \mid n \cdot n'$.

Bevis. Følger umiddelbart fra Proposisjon 2.5.15 ved å la l være 1. □

Eksempel 2.5.19. Siden $72 = 8 \cdot 9$ er $9 \mid 72$. Derfor er $9 \mid 4 \cdot 72$, altså $9 \mid 288$. Vi har: $288 = 32 \cdot 9$.

Eksempel 2.5.20. Siden $-12 = (-2) \cdot 6$ er $6 \mid -12$. Derfor er $6 \mid 63 \cdot (-12)$, altså $6 \mid -756$. Vi har: $-756 = (-126) \cdot 6$.

Korollar 2.5.21. La l, l', og n' være heltall. Anta at $l' \mid n'$. Da er $ll' \mid ln'$.

Bevis. Siden $l = 1 \cdot l$, har vi: $l \mid l$. Derfor følger utsagnet umiddelbart fra Proposisjon 2.5.15 ved å la n være l. □

Eksempel 2.5.22. Siden $42 = 6 \cdot 7$ er $7 \mid 42$. Derfor er $8 \cdot 7 \mid 8 \cdot 42$, altså $56 \mid 336$. Vi har: $336 = 6 \cdot 56$.

Eksempel 2.5.23. Siden $-32 = 4 \cdot (-8)$ er $-8 \mid -32$. Derfor er $(-6) \cdot (-8) \mid (-6) \cdot (-32)$, altså $48 \mid 192$. Vi har: $192 = 4 \cdot 48$.

Proposisjon 2.5.24. La l, m, og n være heltall. Anta at $l \mid m$ og $l \mid n$. Da er $l \mid m + n$.

Bevis. Siden $l \mid m$, finnes det et heltall k slik at $m = kl$. Siden $l \mid n$, finnes det et heltall k' slik at $n = k'l$. Da er

$$\begin{aligned} m + n &= kl + k'l \\ &= (k + k')l. \end{aligned}$$

Siden k og k' er heltall, er $k + k'$ et heltall. Vi konkluderer at $l \mid m + n$. □

Eksempel 2.5.25. Siden $14 = 2 \cdot 7$ er $7 \mid 14$. Siden $63 = 9 \cdot 7$ er $7 \mid 63$. Derfor er $7 \mid 14 + 63$, altså $7 \mid 77$. Vi har: $77 = 11 \cdot 7$.

Eksempel 2.5.26. Siden $-16 = (-4) \cdot 4$ er $4 \mid -16$. Siden $-32 = (-8) \cdot 4$ er $4 \mid -32$. Derfor er $4 \mid (-16) + (-32)$, altså $4 \mid -48$. Vi har: $-48 = (-12) \cdot 4$.

Proposisjon 2.5.27. La l, m, og n være heltall. Anta at $l \mid m$ og at $m \mid n$. Da er $l \mid n$.

Bevis. Siden $l \mid m$, finnes det et heltall k slik at $m = kl$. Siden $m \mid n$, finnes det et heltall k' slik at $n = k'm$. Da er

$$\begin{aligned} n &= k'm \\ &= k'(kl) \\ &= (k'k)l. \end{aligned}$$

Siden k og k' er heltall, er kk' et heltall. Vi konkluderer at $l \mid n$.

□

Eksempel 2.5.28. Siden $24 = 3 \cdot 8$ er $8 \mid 24$. Siden $72 = 3 \cdot 24$ er $24 \mid 72$. Derfor er $7 \mid 8 \mid 72$. Vi har: $72 = 9 \cdot 8$.

Eksempel 2.5.29. Siden $-21 = 3 \cdot (-7)$ er $-7 \mid -21$. Siden $63 = (-3) \cdot (-21)$ er $63 \mid -21$. Derfor er $-7 \mid 63$. Vi har: $63 = (-9) \cdot (-7)$.

Proposisjon 2.5.30. La l og n være naturlige tall. Anta at $l \mid n$. Da er $l \leq n$.

Bevis. Siden $l \mid n$ og både l og n er naturlige tall, finnes det et naturlig tall m slik at $n = ml$. Siden m er et naturlig tall, er $1 \leq m$. Derfor er

$$\begin{aligned} l &\leq ml \\ &= n. \end{aligned}$$

□

Eksempel 2.5.31. Siden $27 = 3 \cdot 9$, er $9 \mid 27$. Vi har: $9 \leq 27$.

Korollar 2.5.32. La l være et heltall, og la n være et heltall slik at $n \neq 0$. Anta at $l \mid n$. Da er $|l| \leq |n|$.

Bevis. Oppgave O2.1.7. □

Eksempel 2.5.33. Siden $-4 = 2 \cdot (-2)$, er $-2 \mid -4$. Vi har: $2 \leq 4$, altså $|-2| \leq |-4|$.

Eksempel 2.5.34. Siden $9 = (-3) \cdot (-3)$, er $-3 \mid 9$. Vi har: $3 \leq 9$, altså $|-3| \leq |9|$.

2.6 Største felles divisor

Definisjon 2.6.1. La l og n være heltall. Et naturlig tall d er den *største felles divisoren* til l og n dersom følgende er sanne.

(1) Vi har: $d \mid l$ og $d \mid n$, altså d er en divisor til både l og n.

(2) La c være et naturlig tall slik at $c \mid l$ og $c \mid n$, altså c er en divisor til både l og n. Da er $c \leq d$.

Notasjon 2.6.2. La l og n være heltall. Dersom det finnes naturlig tall som er den største felles divisoren til l og n, betegner vi det som $\mathsf{sfd}(l, n)$.

Merknad 2.6.3. La l og n være heltall. I Definisjon 2.6.1 kan vi bytte rekkefølgen på l og n uten å endre kravene (1) og (2). Dersom det finnes naturlig tall d som er den største felles divisoren til l og n, følger det at d er også den største felles divisoren til n og l. Med andre ord er $\mathsf{sfd}(l, n) = \mathsf{sfd}(n, l)$.

Eksempel 2.6.4. Divisorene til 6 som er naturlige tall er: 1, 2, 3, og 6. Divisorene til 8 som er naturlige tall er: 1, 2, 4, og 8. Dermed ser vi at de eneste naturlige tallene som deler både 6 og 8 er 1 og 2. Siden $1 \leq 2$, er $\mathsf{sfd}(6, 8) = 2$.

Eksempel 2.6.5. Divisorene til 9 som er naturlige tall er: 1, 3, 9. Divisorene til 12 som er naturlige tall er: 1, 2, 3, 4, 6, og 12. Dermed ser vi at de eneste naturlige tallene som deler både 9 og 12 er 1 og 3. Siden $1 \leq 3$, er $\mathsf{sfd}(9, 12) = 3$.

Eksempel 2.6.6. Divisorene til 30 som er naturlige tall er: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, og 30. Divisorene til 105 som er naturlige tall er: 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, og 105. Dermed ser vi at de eneste naturlige tallene som deler både 30 og 105 er 1, 3, 5, og 15. Siden 15 er den største av disse fire naturlige tallene, er $\mathsf{sfd}(30, 105) = 15$.

Eksempel 2.6.7. Divisorene til 5 som er naturlige tall er: 1 og 5. Divisorene til 7 som er naturlige tall er: 1 og 7. Dermed ser vi at det eneste naturlige tallet som deler både 5 og 7 er 1. Derfor er $\mathsf{sfd}(5, 7) = 1$.

Eksempel 2.6.8. Divisorene til -10 som er naturlige tall er: 1, 2, 5, 10. Divisorene til 18 som er naturlige tall er: 1, 2, 3, 6, 9, 18. Dermed ser vi at de eneste naturlige tallene som deler både -10 og 18 er 1 og 2. Siden $1 \leq 2$, er $\mathsf{sfd}(-10, 18) = 2$.

Eksempel 2.6.9. Divisorene til -21 som er naturlige tall er: 1, 3, 7, 21. Divisorene til -24 som er naturlige tall er: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, og 24. Dermed ser vi at de eneste naturlige tallene som deler både -21 og -24 er 1 og 3. Siden $1 \leq 3$, er $\mathsf{sfd}(-21, -24) = 3$.

Eksempel 2.6.10. La n være et heltall slik at $n \neq 0$. Siden n er delelig med n, og siden alle andre divisorer til n er mindre enn n, er $\mathsf{sfd}(n, n) = n$.

Merknad 2.6.11. Alle naturlige tall er divisorer til 0. Derfor finnes det ikke et naturlig tall som er den største felles divisoren til 0 og 0. Med andre ord har 0 og 0 ikke en største felles divisor.

Proposisjon 2.6.12. La l og n være heltall. Anta at det finnes et naturlig tall d slik at d er den største felles divisoren til l og n. Da er d den største felles divisoren til $-l$ og n.

Bevis. Siden $\mathsf{sfd}(l, n) = d$, har vi:

(1) $d \mid l$;

(2) $d \mid n$;

(3) dersom c er et naturlig tall slik at $c \mid l$ og $c \mid n$, er $c \leq d$.

Vi gjør følgende observasjoner.

(4) Fra (1) og Proposisjon 2.5.12 følger det at $d \mid -l$.

(5) La c være et naturlig tall slik at $c \mid -l$ og $c \mid n$. Siden $c \mid -l$, følger det fra Proposisjon 2.5.12 at $c \mid l$. Derfor har vi: $c \mid l$ og $c \mid n$. Fra (3) deduserer vi at $c \leq d$.

Fra (4), (2), og (5) konkluderer vi at $\mathsf{sfd}(-l, n) = d$.

□

Eksempel 2.6.13. I Eksempel 2.6.4 fant vi at $\mathsf{sfd}(6, 8) = 2$. Derfor fastslår Proposisjon 2.6.12 at $\mathsf{sfd}(-6, 8) = 2$.

Eksempel 2.6.14. I Eksempel 2.6.9 fant vi at $\mathsf{sfd}(-21, -24) = 3$. Derfor fastslår Proposisjon 2.6.12 at $\mathsf{sfd}(21, -24) = 3$.

Korollar 2.6.15. La l og n være heltall. Anta at det finnes et naturlig tall d slik at d er den største felles divisoren til l og n. Da er d den største felles divisoren til l og $-n$.

Bevis. Utsagnet følger umiddelbart fra Merknad 2.6.3 og Proposisjon 2.6.12. □

Eksempel 2.6.16. I Eksempel 2.6.4 fant vi at $\mathsf{sfd}(6, 8) = 2$. Derfor fastslår Korollar 2.6.15 at $\mathsf{sfd}(6, -8) = 2$.

Eksempel 2.6.17. I Eksempel 2.6.9 fant vi at $\mathsf{sfd}(-21, -24) = 3$. Derfor fastslår Korollar 2.6.15 at $\mathsf{sfd}(-21, 24) = 3$.

Korollar 2.6.18. La l og n være heltall. Anta at det finnes et naturlig tall d slik at d er den største felles divisoren til l og n. Da er d den største felles divisoren til $-l$ og $-n$.

Bevis. Siden d er den største felles divisoren til l og n, følger det fra Proposisjon 2.6.12 at d er den største felles divisoren til $-l$ og n. Da følger det fra Korollar 2.6.15 at d er den største felles divisoren til $-l$ og $-n$. □

Eksempel 2.6.19. I Eksempel 2.6.4 fant vi at $\mathsf{sfd}(6, 8) = 2$. Derfor fastslår Korollar 2.6.18 at $\mathsf{sfd}(-6, -8) = 2$.

Eksempel 2.6.20. I Eksempel 2.6.9 fant vi at $\mathsf{sfd}(-21, -24) = 3$. Derfor fastslår Korollar 2.6.18 at $\mathsf{sfd}(21, 24) = 3$.

Proposisjon 2.6.21. La n være et heltall, og la l være et naturlig tall. Anta at $l \mid n$. Da er l den største felles divisoren til l og n.

Bevis. Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Vi har: $l \mid n$;

(2) Siden $l = 1 \cdot l$, har vi: $l \mid l$.

(3) La c være et naturlig tall slik at $c \mid l$ og $c \mid n$. Siden $c \mid l$, følger det fra Proposisjon 2.5.30 at $c \leq l$.

Fra (1) – (3) konkluderer vi at l er den største felles divisoren til l og n.

□

Eksempel 2.6.22. Siden $21 = 7 \cdot 3$, har vi: $3 \mid 21$. Derfor fastslår Proposisjon 2.6.21 at $\mathsf{sfd}(3, 21) = 3$.

Eksempel 2.6.23. Siden $-50 = -2 \cdot 25$, har vi: $25 \mid -50$. Derfor fastslår Proposisjon 2.6.21 at $\mathsf{sfd}(25, -50) = 25$.

Korollar 2.6.24. La l og n være heltall. Anta at $l \mid n$, og at $l \neq 0$. Da er $|l|$ den største felles divisoren til l og n.

Bevis. Ett av følgende utsagn er sant:

(i) $l > 0$;

(ii) $l < 0$.

Anta først at $l > 0$. Da er l et naturlig tall. Ut ifra Proposisjon 2.6.21 er l den største felles divisoren til l og n. I tillegg er $|l| = l$. Dermed er det sant at $|l|$ er den største felles divisoren til l og n.

Anta nå at $l < 0$. Da er $-l$ et naturlig tall. Derfor følger det fra Proposisjon 2.6.21 at $-l$ er den største felles divisoren til $-l$ og n. Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Det følger fra Proposisjon 2.6.12, at $-l$ er den største felles divisoren til l og n.

(3) Siden $l < 0$, har vi: $|l| = -l$.

Dermed er det sant at $|l|$ er den største felles divisoren til l og n.

□

Eksempel 2.6.25. Siden $15 = (-5) \cdot (-3)$, har vi: $-3 \mid 15$. Derfor fastslår Korollar 2.6.24 at $\mathsf{sfd}(-3, 15) = 3$.

Eksempel 2.6.26. Siden $-27 = 9 \cdot (-3)$, har vi: $-3 \mid -27$. Derfor fastslår Korollar 2.6.24 at $\mathsf{sfd}(-3, -27) = 3$.

Proposisjon 2.6.27. La l, m, og n være heltall. La d være et naturlig tall slik at d er den største felles divisoren til l og n. Anta at $n \mid m$. Da er d den største felles divisoren til $l + m$ og n.

Bevis. Oppgave O2.1.8. □

Merknad 2.6.28. Dersom $n \mid m$, er med andre ord $\mathsf{sfd}(l + m, n) = \mathsf{sfd}(l, n)$.

Eksempel 2.6.29. Vi har: $\mathsf{sfd}(12, 21) = 3$. I tilleg har vi: $21 \mid 105$. Proposisjon 2.6.27 fastslår at 3 er den største felles divisoren til $12 + 105$ og 21, altså til 117 og 21.

Eksempel 2.6.30. Vi har: $\mathsf{sfd}(-24, 32) = 8$. I tilleg har vi: $32 \mid -192$. Proposisjon 2.6.27 fastslår at 8 er den største felles divisoren til $-24 - 192$ og 32, altså til -216 og 32.

2.7 Euklids algoritme

Merknad 2.7.1. La l og n være heltall, slik at det ikke er sant at både $l = 0$ og $n = 0$. Det ser kanskje opplagt ut at det finnes et naturlig tall d som er den største felles divisoren til l og n: for å finne d, kan vi bare liste alle heltallene som er divisorer til både l og n, og finne den største av disse.

Imidlertid er dette en ineffektiv algoritme. Vi skal nå gi et bevis ved induksjon for at det finnes et naturlig tall som er den største felles divisoren til l og n. Beviset gir oss en mer effektiv algoritme for å finne den største divisoren til l og n.

I tillegg gir beviset en algoritme for å finne heltall u og v slik at

$$\mathsf{sfd}(l, n) = ul + vn.$$

Vi kommer til å se at det er svært viktig fra et teoretisk synspunkt at vi kan finne heltall x og y slik at denne ligningen er sann.

Merknad 2.7.2. Kjernen av beviset, og dermed av de to algoritmene det fører til, er det følgende lemmaet.

Lemma 2.7.3. La k, l, n, og r være heltall slik at $n = kl + r$. Anta at det finnes et naturlig tall som er den største felles divisoren til n og l, og at det finnes et naturlig tall som er den største felles divisoren til l og r. Da er $\mathsf{sfd}(n, l) = \mathsf{sfd}(l, r)$.

Bevis. La d være $\mathsf{sfd}(n, l)$. Fra definisjonen til $\mathsf{sfd}(n, l)$ har vi:

(i) $d \mid n$;

(ii) $d \mid l$;

(iii) dersom c er et naturlig tall slik at $c \mid n$ og $c \mid l$, er $c \leq d$.

Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Fra (ii) og Korollar 2.5.18 følger det at $d \mid (-k) \cdot l$.

(2) Siden
$$n = kl + r,$$
er
$$r = n + (-k) \cdot l.$$

Fra (i), (2), og Proposisjon 2.5.24, følger det at $d \mid r$.

La c være et naturlig tall slik at:

(iv) $c \mid l$;

(v) $c \mid r$.

Vi gjør følgende observasjoner.

(3) Det følger fra (iv) og Korollar 2.5.18 at $c \mid kl$.

(4) Siden
$$n = kl + r,$$
følger det fra (3), (v) og Proposisjon 2.5.24 at $c \mid n$.

Fra (4), (iv), og (iii), følger det at $c \leq d$.

Således har vi:

(A) $d \mid l$;

(B) $d \mid r$;

(C) dersom $c \mid l$ og $c \mid r$, er $c \leq d$.

Dermed er d den største felles divisoren til l og r.

□

Merknad 2.7.4. Målet vårt er Korollar 2.7.6. Imidlertid skal vi først bevise Proposisjon 2.7.5. Da skal vi observere at Korollar 2.7.6 følger fra Proposisjon 2.7.5.

Kanskje ser Proposisjon 2.7.5 litt rar ut. For hvert par naturlige tall l og s slik at $s < l$, beviser vi på en måte at (I) og (II) er sanne mange ganger: en gang for hvert naturlig tall større enn eller likt l.

Likevel viser det seg at påstanden i Proposisjon 2.7.5 er bedre for å gjennomføre et bevis ved induksjon enn påstanden i Korollar 2.7.6, i det minste for de variantene av induksjon som vi så på i Kapittel 1.

Proposisjon 2.7.5. La n være et naturlig tall slik at $n \geq 2$. La l og s være naturlige tall slik at $s < l \leq n$. Da finnes det et naturlig tall d slik at:

(I) d er den største felles divisoren til l og s;

(II) det finnes heltall u og v slik at $d = ul + vs$.

Bevis. Først sjekker vi om proposisjonen er sann når $n = 1$. La l og s være naturlige tall slik at $s < l \leq 2$. Vi må sjekke om det finnes et naturlig tall d slik at:

(I) d er den største felles divisoren til l og s;

(II) det finnes heltall u og v slik at $d = ul + vs$.

Et par naturlige tall l og s oppfyller kravet $s < l \leq 2$ hvis og bare hvis $s = 1$ og $l = 2$. Derfor emå vi sjekke om det finnes et naturlig tall d slik at:

(A) d er den største felles divisoren til 1 og 2;

(B) det finnes heltall u og v slik at $d = 2u + v$.

Vi gjør følgende observasjoner:

(1) 1 er den største felles divisoren til 1 og 2;

(2) $1 = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1$.

Dermed er (A) og (B) sanne ved å la d være 1, u være 0, og v være 1. Således er proposisjonen sann når $n = 1$.

Anta nå at det har blitt bevist at proposisjonen er sann når n er et gitt naturlig tall m. La l og s være naturlige tall slik at $s < l \leq m + 1$. Vi ønsker å bevise at det finnes et naturlig tall d slik at:

(I) d er den største felles divisoren til l og s;

(II) det finnes heltall u og v slik at $d = ul + vs$.

Ut ifra Proposisjon 2.2.6 finnes det et naturlig tall k og et naturlig tall r slik at:

(i) $l = ks + r$;

(ii) $0 \leq r < s$.

Ett av følgende utsagn er sant:

(A) $r = 0$;

(B) $0 < r < s$.

Anta først at (A) er tilfellet. Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Siden $r = 0$, er $l = ks$. Dermed er $s \mid l$. Det følger fra Proposisjon 2.6.21 at s er den største felles divisoren til l og s.

(2) Vi har:

$$s = 0 \cdot l + 1 \cdot s.$$

Dermed er (I) og (II) sanne ved å la d være s', u være 0, og v være 1. Således er proposisjonen sann når $n = m + 1$.

Anta nå at (B) er tilfellet. Siden

$$s < l \leq m + 1,$$

er $s \leq m$. Dermed er $r < s \leq m$. Fra antakelsen at proposisjonen har blitt bevist når $n = m$, følger det at det finnes et naturlig tall d' slik at:

(iii) d' er den største felles divisoren til s og r;

(iv) det finnes heltall u' og v' slik at $d' = u's + v'r$.

Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Det følger fra (i), (iii), og Lemma 2.7.3 at d' er den største felles divisoren til l og s.

(2) Fra (i) og (iv) er

$$\begin{aligned} d' &= u's + v'r \\ &= u's - v'(l - ks) \\ &= (-v') \cdot l + (u' + kv')s. \end{aligned}$$

Dermed er (A) og (B) sanne ved å la d være d', u være v', og v være $u' + kv'$. Således er proposisjon sann når $n = m + 1$.

Ved induksjon konkluderer vi at proposisjonen er sann når n er et hvilket som helst naturlig tall.

□

Korollar 2.7.6. La n være et naturlig tall. La l være et naturlig tall slik at $l \leq n$. Da finnes det et naturlig tall d slik at:

(I) d er den største felles divisoren til l og n;

(II) det finnes heltall u og v slik at $d = ul + vn$.

Bevis. Ett av følgende utsagn er sant:

(1) $l < n$;

(2) $l = n$.

Anta først at (1) er sant. Siden l er et naturlig tall, er $1 \leq l$. Derfor er $n \geq 2$. Da følger det umiddelbart fra Proposisjon 2.7.5, ved å la l i proposisjonen være n og s i proposisjonen være l, at det finnes et naturlig tall d slik at (I) og (II) er sanne.

Anta nå at (2) er sant. Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Som fastslått i Eksempel 2.6.10, er n den største felles divisoren til n og n.

(2) Vi har:

$$n = 1 \cdot n + 0 \cdot n.$$

Dermed er (I) og (II) sanne ved å la d være n, u være 1, og v være 0.

□

Korollar 2.7.7. La n være et naturlig tall. La l være et naturlig tall. Da finnes det et naturlig tall d slik at:

(I) d er den største felles divisoren til l og n;

(II) det finnes heltall u og v slik at $d = ul + vn$.

Bevis. Ett av følgende utsagn er sant:

(1) $l \leq n$;

(2) $l > n$.

Anta først at (1) er sant. Da følger det fra Korollar 2.7.6 at det finnes et naturlig tall d slik at (I) og (II) er sanne.

Anta nå at (2) er sant. Da følger det fra Korollar 2.7.6 at det finnes et naturlig tall d' og heltall u' og v' slik at:

(A) d' er den største felles divisoren til n og l;

(B) $d' = u'n + v'l$.

La d være d'. Da følger det fra (A) og Merknad 2.6.3 at (I) er sant. La u være v', og v være u'. Da følger det fra (B) at (II) er sant.

□

Merknad 2.7.8. La n være et naturlig tall, og la l være et naturlig tall slik at $l < n$. I Merknad 1.4.3 så vi at induksjon gir en algoritme for å konstruere et bevis for en matematisk påstand. Således gir beviset for Proposisjon 2.7.5 en algoritme for å få den største felles divisoren til l og n. Denne algoritmen kan fremstilles som følger.

(1) Benytt divisjonsalgoritmen for å få heltall k_0 og r_0 slik at

$$n = k_0 l + r_0.$$

Ut ifra Lemma 2.7.3 er $\mathsf{sfd}(l, n) = \mathsf{sfd}(r_0, l)$.

(2) Benytt divisjonsalgoritmen for å få heltall k_1 og r_1 slik at

$$l = k_1 r_0 + r_1.$$

Ut ifra Lemma 2.7.3 er $\mathsf{sfd}(r_0, l) = \mathsf{sfd}(r_1, r_0)$.

(3) Benytt divisjonsalgoritmen for å få heltall k_2 og r_2 slik at

$$r_0 = k_2 r_1 + r_2.$$

Ut ifra Lemma 2.7.3 er $\mathsf{sfd}(r_1, r_0) = \mathsf{sfd}(r_2, r_1)$.

(4) Benytt divisjonsalgoritmen for å få heltall k_3 og r_3 slik at

$$r_1 = k_3 r_2 + r_3.$$

Ut ifra Lemma 2.7.3, er $\mathsf{sfd}(r_2, r_1) = \mathsf{sfd}(r_1, r_0)$.

(5) Slik fortsetter vi.

La oss betegne n som r_{-2} og l som r_{-1}. Til slutt finnes det et heltall i og et heltall k_i slik at vi får

$$r_{i-2} = k_i r_{i-1} + 0$$

når vi benytter divisjonsalgoritmen, altså $r_{i-1} \mid r_{i-2}$. Fra Proposisjon 2.6.21 deduserer vi at $\mathsf{sfd}(r_{i-1}, r_{i-2}) = r_{i-1}$. Dermed er

$$\mathsf{sfd}(l, n) = \mathsf{sfd}(r_0, l) = \mathsf{sfd}(r_1, r_0) = \mathsf{sfd}(r_2, r_1) = \cdots = \mathsf{sfd}(r_{i-1}, r_{i-2}) = r_{i-1}.$$

Således er $\mathsf{sfd}(l, n) = r_{i-1}$.

Terminologi 2.7.9. Algoritmen i Merknad 2.7.8 kalles *Euklids algoritme*.

Merknad 2.7.10. Strengt tatt er algoritmen som vi får fra beviset for Proposisjon 2.7.5 ikke *helt* den samme som algoritmen i Merknad 2.7.8. I hvert steg av algoritmen vi får fra beviset for Proposisjon 2.7.5 beviser vi flere fakta enn vi trenger for å finne den største felles divisoren til et bestemt par naturlige tall.

Alle disse faktaene behøves derimot for å gjennomføre beviset for Proposisjon 2.7.5 betraktet i sin helhet, men når vi ønsker å finne den største felles divisoren til et bestemt par naturlige tall, kan vi plukke ut de faktaene som behøves. Da får vi algoritmen i Merknad 2.7.8.

Eksempel 2.7.11. La oss se hvordan Euklids algoritme ser ut når $n = 6$ og $l = 4$.

(1) Vi begynner med å benytte divisjonsalgoritmen for å få:

$$6 = 1 \cdot 4 + 2.$$

Fra Lemma 2.7.3 deduserer vi at

$$\mathsf{sfd}(6, 4) = \mathsf{sfd}(4, 2).$$

(2) Da benytter vi divisjonsalgoritmen for å få:

$$4 = 2 \cdot 2 + 0,$$

altså $2 \mid 4$. Fra Proposisjon 2.6.21 deduserer vi at $\mathsf{sfd}(4, 2) = 2$.

Dermed er
$$\mathsf{sfd}(6,4) = \mathsf{sfd}(4,2) = 2.$$

Eksempel 2.7.12. La oss se hvordan Euklids algoritme ser ut når $n = 20$ og $l = 8$.

(1) Vi begynner med å benytte divisjonsalgoritmen for å få:
$$20 = 2 \cdot 8 + 4.$$
Fra Lemma 2.7.3 deduserer vi at
$$\mathsf{sfd}(20,8) = \mathsf{sfd}(8,4).$$

(2) Da benytter vi divisjonsalgoritmen for å få:
$$8 = 2 \cdot 4 + 0,$$
altså $4 \mid 8$. Fra Proposisjon 2.6.21 deduserer vi at $\mathsf{sfd}(8,4) = 4$.

Dermed er
$$\mathsf{sfd}(20,8) = \mathsf{sfd}(8,4) = 4.$$

Eksempel 2.7.13. La oss se hvordan Euklids algoritme ser ut når $n = 18$ og $l = 10$.

(1) Vi begynner med å benytte divisjonsalgoritmen for å få:
$$18 = 1 \cdot 10 + 8.$$
Fra Lemma 2.7.3 deduserer vi at
$$\mathsf{sfd}(18,10) = \mathsf{sfd}(10,8).$$

(2) Da benytter vi divisjonsalgoritmen for å få:
$$10 = 1 \cdot 8 + 2.$$
Fra Lemma 2.7.3 deduserer vi at $\mathsf{sfd}(10,8) = \mathsf{sfd}(8,2)$.

(3) Da benytter vi divisjonsalgoritmen for å få:
$$8 = 4 \cdot 2 + 0,$$
altså $2 \mid 8$. Fra Proposisjon 2.6.21 deduserer vi at $\mathsf{sfd}(8,2) = 2$.

Dermed er
$$\mathsf{sfd}(18,10) = \mathsf{sfd}(10,8) = \mathsf{sfd}(8,2) = 2.$$

Eksempel 2.7.14. La oss se hvordan Euklids algoritme ser ut når $n = 54$ og $l = 15$.

(1) Vi begynner med å benytte divisjonsalgoritmen for å få:

$$54 = 3 \cdot 15 + 9.$$

Fra Lemma 2.7.3 deduserer vi at

$$\mathsf{sfd}(54, 15) = \mathsf{sfd}(15, 9).$$

(2) Da benytter vi divisjonsalgoritmen for å få:

$$15 = 1 \cdot 9 + 6.$$

Fra Lemma 2.7.3 deduserer vi at $\mathsf{sfd}(15, 9) = \mathsf{sfd}(9, 6)$.

(3) Da benytter vi divisjonsalgoritmen for å få:

$$9 = 1 \cdot 6 + 3.$$

Fra Lemma 2.7.3 deduserer vi at $\mathsf{sfd}(9, 6) = \mathsf{sfd}(6, 3)$.

(4) Da benytter vi divisjonsalgoritmen for å få:

$$6 = 2 \cdot 3 + 0.$$

Fra Proposisjon 2.6.21 deduserer vi at $\mathsf{sfd}(6, 3) = 3$.

Dermed er

$$\mathsf{sfd}(54, 15) = \mathsf{sfd}(15, 9) = \mathsf{sfd}(9, 6) = \mathsf{sfd}(6, 3) = 3.$$

Merknad 2.7.15. La n være et naturlig tall, og la l være et naturlig tall slik at $l < n$. Som vi har sett, gir Euklids algoritme oss den største felles divisoren til l og n. La oss betegne $\mathsf{sfd}(l, n)$ som d.

Proposisjon 2.7.5 gir oss i tillegg en algoritme for å finne heltall x og y slik at

$$d = ul + vn.$$

Igjen beviser i hvert steg av denne algoritmen flere fakta enn vi trenger. Ved å plukke ut bare de faktaene som behøves, kan algoritmen fremstilles som følger.

(1) Benytt divisjonsalgoritmen for å få heltall k_0 og r_0 slik at

$$n = k_0 l + r_0.$$

Da er

$$r_0 = -k_0 l + n.$$

La u_0 være $-k_0$, og la v_0 være 1.

(2) Benytt divisjonsalgoritmen for å få heltall k_1 og r_1 slik at

$$l = k_1 r_0 + r_1.$$

Da er

$$\begin{aligned} r_1 &= l - k_1 r_0 \\ &= l - k_1(u_0 l + v_0 n) \\ &= (1 - u_0 k_1)l - (v_0 k_1)n. \end{aligned}$$

La u_1 være $1 - u_0 k_1$, og la v_1 være $-v_0 k_1$.

(3) Benytt divisjonsalgoritmen for å få heltall k_2 og r_2 slik at

$$r_0 = k_2 r_1 + r_2.$$

Da er

$$\begin{aligned} r_2 &= r_0 - k_2 r_1 \\ &= (u_0 l + v_0 n) - k_2(u_1 l + v_1 n) \\ &= (u_0 - u_1 k_2)l + (v_0 - v_1 k_2)n. \end{aligned}$$

La u_2 være $u_0 - u_1 k_2$, og la v_2 være $v_0 - v_1 k_2$.

(4) Benytt divisjonsalgoritmen for å få heltall k_3 og r_3 slik at

$$r_1 = k_3 r_2 + r_3.$$

Da er

$$\begin{aligned} r_3 &= r_1 - k_3 r_2 \\ &= (u_1 l + v_1 n) - k_3(u_2 l + v_2 n) \\ &= (u_1 - u_2 k_3)l + (v_1 - v_2 k_3)n. \end{aligned}$$

La u_3 være $u_1 - u_2 k_3$, og la v_3 være $v_1 - v_2 k_3$.

(5) Slik fortsetter vi.

La oss betegne n som r_{-2} og l som r_{-1}. Til slutt finnes det et heltall i og et heltall k_i slik at vi får

$$r_{i-2} = k_i r_{i-1} + 0$$

når vi benytter divisjonsalgoritmen. Fra Euklids algoritme vet vi at $d = r_{i-1}$. Vi gjør følgende.

(1) Hvis $i = 0$, er $d = l$. I dette tilfellet er $u = 1$ og $v = 0$, altså

$$d = 1 \cdot l + 0 \cdot n.$$

(2) Ellers er

$$r_{i-1} = u_{i-1}l + v_{i-1}r,$$

altså

$$d = u_{i-1}l + v_{i-1}r.$$

I dette tilfellet er $u = u_{i-1}$ og $v = v_{i-1}$.

Eksempel 2.7.16. La oss se hvordan algoritmen i Merknad 2.7.15 ser ut når $n = 6$ og $l = 4$. Fra Eksempel 2.7.11 vet vi at $\mathsf{sfd}(6, 4) = 2$. Derfor bør algoritmen gi oss heltall u og v slik at

$$2 = u \cdot 6 + v \cdot 4.$$

(1) Vi begynner med å benytte divisjonsalgoritmen for å få:

$$6 = 1 \cdot 4 + 2.$$

Da er

$$2 = -1 \cdot 4 + 6.$$

Vi lar u_0 være -1, og lar v_0 være 1.

(2) Da benytter vi divisjonsalgoritmen for å få:

$$4 = 2 \cdot 2 + 0,$$

altså $2 \mid 4$.

Fra Euklids algoritme deduserer vi at $\mathsf{sfd}(6, 4) = 2$. Dermed er $u = u_0$ og $v = v_0$, altså $u = -1$ og $v = 1$. For å oppsummere, har vi:

$$2 = (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 6.$$

Eksempel 2.7.17. La oss se hvordan algoritmen i Merknad 2.7.15 ser ut når $n = 20$ og $l = 8$. Fra Eksempel 2.7.12 vet vi at $\mathsf{sfd}(20, 8) = 4$. Derfor bør algoritmen gi oss heltall u og v slik at

$$4 = u \cdot 8 + v \cdot 20.$$

(1) Vi begynner med å benytte divisjonsalgoritmen for å få:

$$20 = 2 \cdot 8 + 4.$$

Da er

$$4 = -2 \cdot 8 + 1 \cdot 20.$$

Vi lar u_0 være -2, og lar v_0 være 1.

(2) Da benytter vi divisjonsalgoritmen for å få:

$$8 = 2 \cdot 4 + 0.$$

Fra Euklids algoritme deduserer vi at $\mathsf{sfd}(20, 8) = 4$. Dermed er $u = u_0$ og $v = v_0$, altså $u = -2$ og $v = 1$. For å oppsummere, har vi:

$$4 = (-2) \cdot 8 + 1 \cdot 20.$$

Eksempel 2.7.18. La oss se hvordan algoritmen i Merknad 2.7.15 ser ut når $n = 18$ og $l = 10$. Fra Eksempel 2.7.13 vet vi at $\mathsf{sfd}(18, 10) = 2$. Derfor bør algoritmen gi oss heltall u og v slik at

$$2 = u \cdot 10 + v \cdot 18.$$

(1) Vi begynner med å benytte divisjonsalgoritmen for å få:

$$18 = 1 \cdot 10 + 8.$$

Da er

$$8 = -1 \cdot 10 + 1 \cdot 18.$$

Vi lar u_0 være -1, og lar v_0 være 1.

(2) Da benytter vi divisjonsalgoritmen for å få:

$$10 = 1 \cdot 8 + 1 \cdot 2.$$

Da er

$$\begin{aligned} 2 &= -1 \cdot 8 + 10 \\ &= -1 \cdot (-1 \cdot 10 + 18) + 10 \\ &= 2 \cdot 10 + (-1) \cdot 18. \end{aligned}$$

Vi lar u_1 være 2, og lar v_1 være -1.

(3) Da benytter vi divisjonsalgoritmen for å få:

$$8 = 4 \cdot 2 + 0.$$

Fra Euklids algoritme deduserer vi at $\mathsf{sfd}(18, 10) = 2$. Dermed er $u = u_1$ og $v = v_1$, altså $u = 2$ og $v = -1$. For å oppsummere, har vi:

$$2 = 2 \cdot 10 + (-1) \cdot 18.$$

Eksempel 2.7.19. La oss se hvordan algoritmen i Merknad 2.7.15 ser ut når $n = 54$ og $l = 15$. Fra Eksempel 2.7.14 vet vi at $\mathsf{sfd}(54, 15) = 3$. Derfor bør algoritmen gi oss heltall u og v slik at

$$3 = u \cdot 15 + v \cdot 54.$$

(1) Vi begynner med å benytte divisjonsalgoritmen for å få:

$$54 = 3 \cdot 15 + 9.$$

Da er

$$9 = -3 \cdot 15 + 1 \cdot 54.$$

Vi lar u_0 være -3, og lar v_0 være 1.

(2) Da benytter vi divisjonsalgoritmen for å få:

$$15 = 1 \cdot 9 + 1 \cdot 6.$$

Da er

$$\begin{aligned} 6 &= -1 \cdot 9 + 15 \\ &= -1 \cdot (-3 \cdot 15 + 54) + 15 \\ &= 4 \cdot 15 + (-1) \cdot 54. \end{aligned}$$

Vi lar u_1 være 4, og lar v_1 være -1.

(3) Da benytter vi divisjonsalgoritmen for å få:

$$9 = 1 \cdot 6 + 1 \cdot 3.$$

Da er

$$\begin{aligned} 3 &= -1 \cdot 6 + 9 \\ &= -1 \cdot (4 \cdot 15 - 54) + (-3 \cdot 15 + 54) \\ &= (-7) \cdot 15 + 2 \cdot 54. \end{aligned}$$

Vi lar u_2 være -7, og lar v_2 være 2.

(4) Da benytter vi divisjonsalgoritmen for å få:

$$6 = 2 \cdot 3 + 0.$$

Fra Euklids algoritme deduserer vi at $\mathsf{sfd}(54, 15) = 3$. Dermed er $u = u_2$ og $v = v_2$, altså $u = -7$ og $v = -2$. For å oppsummere, har vi:

$$3 = (-7) \cdot 15 + 2 \cdot 54.$$

Korollar 2.7.20. La n og l være heltall. Anta at det ikke er sant at både n og l er lik 0. Da finnes det et naturlig tall d slik at:

(I) d er den største felles divisoren til l og n;

(II) det finnes heltall u og v slik at $d = ul + vn$.

Bevis. Ett av følgende utsagn er sant:

(1) $l > 0$ og $n > 0$;

(2) $l > 0$ og $n < 0$;

(3) $l < 0$ og $n > 0$;

(4) $l < 0$ og $n < 0$;

(5) $l \neq 0$ og $n = 0$.

(6) $l = 0$ og $n \neq 0$.

Anta først at (1) er sant. Da er l og n naturlige tall. Det følger fra Korollar 2.7.7 at det finnes et naturlig tall d slik at (I) og (II) er sanne.

Anta nå at (2) er sant. Da er l og $-n$ naturlige tall. Det følger fra Korollar 2.7.7 at det finnes et naturlig tall d' slik at:

(A) d' er den største felles divisoren til l og $-n$;

(B) det finnes heltall u' og v' slik at $d' = u'l + v'(-n)$.

La d være d'. Det følger fra (A) og Korollar 2.6.15 at d er den største felles divisoren til l og $-(-n)$, altså til l og n. Dermed er (I) sant.

La u være u', og la v være $-v'$. Ut ifra (B) er

$$\begin{aligned} d &= u'l + v'(-n) \\ &= u'l + (-v')n \\ &= ul + vn. \end{aligned}$$

Dermed er (II) sant.

Anta nå at (3) er sant. Da er $-l$ og n naturlige tall. Det følger fra Korollar 2.7.7 at det finnes et naturlig tall d' slik at:

(A) d' er den største felles divisoren til $-l$ og n;

(B) det finnes heltall u' og v' slik at $d' = u'(-l) + v'n$.

La d være d'. Det følger fra (A) og Proposisjon 2.6.12 at d er den største felles divisoren til $-(-l)$ og n, altså til l og n. Dermed er (I) sant.

La u være $-u'$, og la v være v'. Ut ifra (B) er

$$\begin{aligned} d &= u'(-l) + v'n \\ &= (-u')l + v'n \\ &= ul + vn. \end{aligned}$$

Dermed er (II) sant.

Anta nå at (4) er sant. Da er $-l$ og $-n$ naturlige tall. Det følger fra Korollar 2.7.7 at det finnes et naturlig tall d' slik at:

(A) d' er den største felles divisoren til $-l$ og $-n$;

(B) det finnes heltall u' og v' slik at $d' = u'(-l) + v'(-n)$.

La d være d'. Det følger fra (A) og Korollar 2.6.18 at d er den største felles divisoren til $-(-l)$ og $-(-n)$, altså til l og n. Dermed er (I) sant.

La u være $-u'$, og la v være $-v'$. Ut ifra (B) er

$$\begin{aligned} d &= u'(-l) + v'(-n) \\ &= (-u')l + (-v')n \\ &= ul + vn. \end{aligned}$$

Dermed er (II) sant.

Anta nå at (5) er sant. Alle heltall er divisorer til 0. Den største divisoren til l er l. Derfor er l den største felles divisoren til l og 0. La d være l, la x være 1, og la y være 0. Da er

$$l = 1 \cdot l + 0 \cdot 0.$$

Dermed er (I) og (II) sanne.

Anta nå at (6) er sant. Alle heltall er divisorer til 0. Den største divisoren til n er n. Derfor er n den største felles divisoren til 0 og n. La d være n, la x være 0, og la y være 1. Da er

$$n = 0 \cdot 0 + 1 \cdot n.$$

Dermed er (I) og (II) sanne.

□

Eksempel 2.7.21. Beviset for Korollar 2.7.20 fastslår at $\mathsf{sfd}(20, -8)$ kan finnes ved å benytte Euklids algoritme når $n = 20$ og $l = 8$. Vi gjorde dette i Eksempel 2.7.12. Vi har:

$$\mathsf{sfd}(20, -8) = \mathsf{sfd}(20, 8) = 4.$$

I tillegg fastslår beviset for Korollar 2.7.20 at vi kan finne heltall u og v slik at

$$4 = u \cdot (-8) + v \cdot 20$$

på følgende måte.

(1) Benytt algoritmen i Merknad 2.7.15 for å få heltall u' og v' slik at

$$4 = u' \cdot 8 + v' \cdot 20.$$

Vi gjorde dette i Eksempel 2.7.17. Vi har:

$$4 = (-2) \cdot 8 + 1 \cdot 20.$$

(2) La u være 2, og la v være 1.

Da er

$$\begin{aligned} u \cdot (-8) + v \cdot 20 &= 2 \cdot (-8) + 1 \cdot 20 \\ &= (-2) \cdot 8 + 1 \cdot 20 \\ &= 4. \end{aligned}$$

Eksempel 2.7.22. Beviset for Korollar 2.7.20 fastslår at $\mathsf{sfd}(-18, 10)$ kan finnes ved å benytte Euklids algoritme når $n = 18$ og $l = 10$. Vi gjorde dette i Eksempel 2.7.13. Vi har:

$$\mathsf{sfd}(-18, 10) = \mathsf{sfd}(18, 10) = 2.$$

I tilleg fastslår beviset for Korollar 2.7.20 at vi kan finne heltall u og v slik at

$$2 = u \cdot 10 + v \cdot (-18)$$

på følgende måte.

(1) Benytt algoritmen i Merknad 2.7.15 for å få heltall u' og v' slik at

$$2 = u' \cdot 10 + v' \cdot 18.$$

Vi gjorde dette i Eksempel 2.7.18. Vi har:

$$2 = 2 \cdot 10 + (-1) \cdot 18.$$

(2) La u være 2, og la v være 1.

Da er

$$\begin{aligned} u \cdot 10 + v \cdot (-18) &= 2 \cdot 10 + 1 \cdot (-18) \\ &= 2 \cdot 10 + (-1) \cdot 18 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Eksempel 2.7.23. Beviset for Korollar 2.7.20 fastslår at $\mathsf{sfd}(-15, -54)$ kan finnes ved å benytte Euklids algoritme når $n = 54$ og $l = 15$. Vi gjorde dette i Eksempel 2.7.14. Vi har:

$$\mathsf{sfd}(-15, -54) = \mathsf{sfd}(54, 15) = 3.$$

I tilleg fastslår beviset for Korollar 2.7.20 at vi kan finne heltall u og v slik at

$$3 = u \cdot (-54) + v \cdot (-15)$$

på følgende måte.

(1) Benytt algoritmen i Merknad 2.7.15 for å få heltall u' og v' slik at

$$3 = u' \cdot 15 + v' \cdot 54.$$

Vi gjorde dette i Eksempel 2.7.19. Vi har:

$$3 = (-7) \cdot 15 + 2 \cdot 54.$$

(2) La u være -2, og la v være 7.

Da er

$$\begin{aligned} u \cdot (-54) + v \cdot (-15) &= (-2) \cdot (-54) + 7 \cdot (-15) \\ &= 2 \cdot 54 + (-7) \cdot 15 \\ &= (-7) \cdot 15 + 2 \cdot 54 \\ &= 3. \end{aligned}$$

2.8 Relativt primiske heltall og Euklids lemma

Merknad 2.8.1. Korollar 2.7.20 er et svært viktig teoretisk verktøy. I denne og neste del av kapittelet skal vi se på noen eksempler som kan hjelpe oss å få en følelse for hvordan Korollar 2.7.20 kan benyttes.

Proposisjon 2.8.2. La l og n være heltall. La k være et naturlig tall. La d være et naturlig tall slik at d er den største felles divisoren til l og n. Da er kd den største felles divisoren til kl og kn.

Bevis. Siden d er den største felles divisoren til l og n, har vi:

(1) $d \mid l$;

(2) $d \mid n$.

Fra (1) og Korollar 2.5.21 deduserer vi at $kd \mid kl$. Fra (2) og Korollar 2.5.21 deduserer vi at $kd \mid kn$.

La c være et naturlig tall slik at:

(i) $c \mid kl$;

(ii) $c \mid kn$.

Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Ut ifra Korollar 2.7.20 finnes det heltall u og v slik at

$$d = ul + vn.$$

Det følger at

$$kd = ukl + ukn.$$

(2) Fra (i) og Korollar 2.5.18 følger det at $c \mid ukl$.

(3) Fra (ii) og Korollar 2.5.18 følger det at $c \mid vkn$.

(4) Fra (2), (3), og Proposisjon 2.5.24 følger det at $c \mid ukl + ukn$.

(5) Fra (1) og (4) følger det at

$$c \mid kd.$$

(6) Siden k og d er naturlige tall, er kd et naturlig tall.

(7) Siden c er et naturlig tall, følger det fra (5), (6), og Proposisjon 2.5.30 at $c \leq kd$.

For å oppsummere beviset så langt, har vi bevist at:

(1) $kd \mid kl$;

(2) $kd \mid kn$;

(3) dersom $c \mid kl$ og $c \mid kn$, er $c \leq kd$.

Dersom er kd den største felles divisoren til kl og kn.

□

Eksempel 2.8.3. Vi har: $\mathsf{sfd}(18, 24) = 6$. Siden $90 = 5 \cdot 18$ og $120 = 5 \cdot 24$, følger det fra Proposisjon 2.8.2 at

$$\mathsf{sfd}(90, 120) = 5 \cdot \mathsf{sfd}(18, 24) = 5 \cdot 6 = 30.$$

Eksempel 2.8.4. Vi har: $\mathsf{sfd}(13, -21) = 1$. Siden $91 = 7 \cdot 13$ og $-147 = 7 \cdot -21$, følger det fra Proposisjon 2.8.2 at

$$\mathsf{sfd}(91, -147) = 7 \cdot \mathsf{sfd}(13, -21) = 7 \cdot 1 = 7.$$

Korollar 2.8.5. La l og n være heltall. La k være et heltall slik at $k \neq 0$. La d være et naturlig tall slik at d er den største felles divisoren til l og n. Da er $|k| \cdot d$ den største felles divisoren til kl og kn.

Bevis. Ett av følgende utsagn er sant:

(1) $k > 0$;

(2) $k < 0$.

Anta først at (1) er sant. Da er k et naturlig tall, og $|k|\, k$. Dermed følger utsagnet fra Proposisjon 2.8.2.

Anta nå at (2) er sant. Da er $-k$ et naturlig tall, og $|k| = -k$. Det følger fra Proposisjon 2.8.2 at $|k| \cdot d$ er den største felles divisoren til $(-k) \cdot l$ og $(-k) \cdot n$. Fra Korollar 2.6.18 følger det at $|k|$ er den største felles divisoren til $-(-k) \cdot l$ og $-(-k) \cdot n$, altså til l og n.

□

Eksempel 2.8.6. Vi har: $\mathsf{sfd}(14, 63) = 7$. Det følger fra Korollar 2.8.5 at

$$\mathsf{sfd}(-154, -693) = |-11| \cdot 7 = 11 \cdot 7 = 77.$$

Eksempel 2.8.7. Vi har: $\mathsf{sfd}(-76, 20) = 4$. Det følger fra Korollar 2.8.5 at

$$\mathsf{sfd}(380, -100) = |-5| \cdot 4 = 5 \cdot 4 = 20.$$

Proposisjon 2.8.8. La l og n være heltall. Da er $\mathsf{sfd}(l, n) = 1$ hvis og bare hvis det finnes heltall u og v slik at

$$1 = ul + vn.$$

Bevis. Anta først at $\mathsf{sfd}(l, n) = 1$. Da følger det fra Korollar 2.7.20 at det finnes heltall u og v slik at

$$1 = ul + vn.$$

Anta istedenfor at det finnes heltall u og v slik at

$$1 = ul + vn.$$

La c være et naturlig tall slik at:

(i) $c \mid l$;

(ii) $c \mid n$.

Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Det følger fra (1) og Korollar 2.5.18 at $c \mid ul$.

(2) Det følger fra (2) og Korollar 2.5.18 at $c \mid vn$.

(3) Det følger fra (1), (2), og Proposisjon 2.5.24 at $c \mid ul + vn$.

Det følger fra (3) og ligningen $1 = ul + vn$ at $c \mid 1$.

Dermed har vi bevist at $c \mid 1$ dersom $c \mid l$ og $c \mid n$. I tillegg har vi: $1 \mid l$ og at $1 \mid n$. Vi konkluderer at $\mathsf{sfd}(l, n) = 1$.

$\square$

Eksempel 2.8.9. Vi har:

$$1 = (-2) \cdot 14 + 29.$$

Derfor fastslår Proposisjon 2.8.8 at $\mathsf{sfd}(14, 29) = 1$.

Eksempel 2.8.10. Vi har:

$$1 = 5 \cdot 13 - 8 \cdot 8.$$

Derfor fastslår Proposisjon 2.8.8 at $\mathsf{sfd}(13, 8) = 1$.

Merknad 2.8.11. Proposisjon 2.8.8 stemmer ikke om vi bytter 1 med et annet heltall. For eksempel er

$$2 = 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 7,$$

men $\mathsf{sfd}(3, 7) \neq 2$. Faktisk er $\mathsf{sfd}(3, 7) = 1$.

Terminologi 2.8.12. La l og n være heltall slik at $\mathsf{sfd}(l, n) = 1$. Da sier vi at l og n er *relativt primiske*.

Proposisjon 2.8.13. La l og n være heltall, og la d være et heltall slik at $\mathsf{sfd}(l, n) = d$. La k_l være heltallet slik at $l = k_l d$, og la k_n være heltallet slik at $n = k_n d$. Da er $\mathsf{sfd}(k_l, k_n) = 1$.

Bevis. Ut ifra Korollar 2.7.20, finnes det heltall u og v slik at

$$d = ul + vn.$$

Derfor er

$$d = uk_l d + uk_n n,$$

altså

$$d = d(uk_l + uk_n).$$

Det følger fra Proposisjon 2.2.25 at

$$1 = uk_l + uk_n.$$

Fra Proposisjon 2.8.8 konkluderer vi at $\mathsf{sfd}(k_l, k_n) = 1$. $\square$

Merknad 2.8.14. Fra definisjonen til $\mathsf{sfd}(l,n)$ vet vi at $d \mid l$ og at $d \mid r$. Derfor finnes det heltall k_l og k_n slik at ligningene i Proposisjon 2.8.13 er sanne. Ut ifra Korollar 2.2.20 er dessutten k_l og k_n de eneste heltallene slik at disse to ligningene er sanne.

Eksempel 2.8.15. Vi har:

$$\mathsf{sfd}(108,45) = 9.$$

Derfor fastslår Proposisjon 2.8.13 at

$$\mathsf{sfd}(12,5) = 1.$$

Eksempel 2.8.16. Vi har:

$$\mathsf{sfd}(-48,27) = 3.$$

Derfor fastslår Proposisjon 2.8.13 at

$$\mathsf{sfd}(-16,9) = 1.$$

Proposisjon 2.8.17. La l, l', og n være heltall. Anta at $l \mid n$ og at $l' \mid n$. Dersom $\mathsf{sfd}(l,l') = 1$, har vi: $l \cdot l' \mid n$.

Bevis. Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Siden $l \mid n$, finnes det et heltall k_l slik at $n = k_l l$.

(2) Siden $l' \mid n$, finnes det et heltall $k_{l'}$ slik at $n = k_{l'} l'$.

(3) Ut ifra Korollar 2.7.20 finnes det heltall u og v slik at

$$1 = ul + vl'.$$

Det følger fra (1) – (3) at

$$\begin{aligned} n &= uln + vl'n \\ &= ulk_{l'}l' + vl'k_l l \\ &= (uk_{l'} + vk_l)ll'. \end{aligned}$$

Dermed har vi: $ll' \mid n$.

□

Eksempel 2.8.18. Vi har: $5 \mid 80$ og $8 \mid 80$. Siden $\mathsf{sfd}(5,8) = 1$, fastslår Proposisjon 2.8.17 at $5 \cdot 8 \mid 40$, altså at $40 \mid 80$.

Eksempel 2.8.19. Vi har: $-9 \mid 882$ og $-14 \mid 882$. Siden $\mathsf{sfd}(-9,-14) = 1$, fastslår Proposisjon 2.8.17 at $-9 \cdot -14 \mid 882$, altså at $126 \mid 882$.

Merknad 2.8.20. Proposisjon 2.8.17 stemmer ikke om $\mathsf{sfd}(l,n) \neq 1$. For eksempel er $\mathsf{sfd}(9,15) = 3$, og vi har: $9 \mid 45$ og $15 \mid 45$. Men $9 \cdot 15 = 135$, og det er ikke sant at $135 \mid 45$.

Merknad 2.8.21. Den følgende proposisjonen er kjernen til et teorem vi kommer til å bevise i det neste kapitelet. Det kalles noen ganger *Euklids lemma*.

Proposisjon 2.8.22. La l, n, og n' være heltall slik at $l \mid n \cdot n'$. Dersom $\mathsf{sfd}(l, n) = 1$, har vi: $l \mid n'$.

Bevis. Siden $\mathsf{sfd}(l, n) = 1$, fastslår Korollar 2.7.20 at det finnes heltall u og v slik at

$$1 = ul + vn.$$

Derfor er

$$n' = (u \cdot l) \cdot n' + (v \cdot n) \cdot n') = (u \cdot n') \cdot l + v \cdot (n \cdot n').$$

Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Siden $l \mid l$, følger det fra Korollar 2.5.18 at $l \mid (u \cdot n') \cdot l$.

(2) Fra Korollar 2.5.18 og antakelsen at $l \mid n \cdot n'$, har vi: $l \mid v \cdot (n \cdot n')$.

Fra (1), (2), og Proposisjon 2.5.24, følger det at $l \mid l \cdot (u \cdot n') + v \cdot (n \cdot n')$. Dermed har vi: $l \mid n'$.

□

Eksempel 2.8.23. Vi har: $\mathsf{sfd}(9, 25) = 1$. I tillegg har vi: $9 \mid 1125$. Siden $1125 = 25 \cdot 45$, fastslår Proposisjon 2.8.22 at

$$9 \mid 45.$$

Eksempel 2.8.24. Vi har: $\mathsf{sfd}(-17, 24) = 1$. I tillegg har vi: $-17 \mid 2248$. Siden $2248 = 24 \cdot 102$, fastslår Proposisjon 2.8.22 at

$$-17 \mid 102.$$

Merknad 2.8.25. Proposisjon 2.8.22 stemmer ikke om $\mathsf{sfd}(l, n) \neq 1$. For eksempel er $\mathsf{sfd}(2, 4) = 2$, og $2 \mid 28$. Vi har: $28 = 4 \cdot 7$, men det er ikke sant at $2 \mid 7$.

Proposisjon 2.8.26. La l, m, og n være heltall. La d være et naturlig tall slik at d er den største felles divisoren til l og m. Anta at $1 = \mathsf{sfd}(l, n)$. Da er d den største felles divisoren til l og mn.

Bevis. Oppgave O2.1.10. □

Merknad 2.8.27. Dersom $1 = \mathsf{sfd}(l, n)$, er med andre ord $\mathsf{sfd}(l, m) = \mathsf{sfd}(l, mn)$.

Eksempel 2.8.28. Vi har: $\mathsf{sfd}(33, 44) = 11$. I tilleg har vi: $\mathsf{sfd}(33, 50) = 1$. Proposisjon 2.8.26 fastslår at $\mathsf{sfd}(33, 44 \cdot 50) = \mathsf{sfd}(33, 44)$, altså at $\mathsf{sfd}(33, 2200) = 11$.

Eksempel 2.8.29. Vi har: $\mathsf{sfd}(18, -27) = 9$. I tilleg har vi: $\mathsf{sfd}(18, 29) = 1$. Proposisjon 2.8.26 fastslår at $\mathsf{sfd}(18, -27 \cdot 29) = \mathsf{sfd}(18, -27)$, altså at $\mathsf{sfd}(18, -783) = 9$.

Proposisjon 2.8.30. La x, y, og z være heltall. Da er $\mathsf{sfd}(x, yz) = 1$ om og bare om $\mathsf{sfd}(x, y) = 1$ og $\mathsf{sfd}(x, z) = 1$.

Bevis. Anta først at $\mathsf{sfd}(x, y) = 1$ og $\mathsf{sfd}(x, z) = 1$. Siden $\mathsf{sfd}(x, y) = 1$, følger det fra Proposisjon 2.8.26 at $\mathsf{sfd}(x, yz) = \mathsf{sfd}(x, z)$. Siden $\mathsf{sfd}(x, z) = 1$, konkluderer vi at $\mathsf{sfd}(x, yz) = 1$.

Anta istedenfor at $\mathsf{sfd}(x, yz) = 1$. La w være et naturlig tall slik at $w \mid x$ og $w \mid y$. Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Siden $w \mid y$, følger det fra Korollar **??** at $w \mid yz$.

(2) Siden $w \mid x$ og $w \mid yz$, følger det fra antakelsen $\mathsf{sfd}(x, yz) = 1$ at $w = 1$.

Således har vi bevist at, dersom w er et naturlig tall slik at $w \mid x$ og $w \mid y$, er $w = 1$. Dermed er $\mathsf{sfd}(x, y) = 1$.

Et lignende argument fastslår at, dersom w er et naturlig tall slik at $w \mid x$ og $w \mid z$, er $w = 1$. Dermed er $\mathsf{sfd}(x, z) = 1$.

□

Eksempel 2.8.31. Ved å benytte Euklids algoritme, finner vi at $\mathsf{sfd}(8, 1155) = 1$. Siden $1155 = 33 \cdot 35$, fastslår da Proposisjon 2.8.30 at $\mathsf{sfd}(8, 33) = 1$ og $\mathsf{sfd}(8, 35) = 1$. Dette er riktignok sant.

Eksempel 2.8.32. Siden $\mathsf{sfd}(9, -26) = 1$ og $\mathsf{sfd}(9, 77) = 1$, fastslår Proposisjon 2.8.30 at $\mathsf{sfd}(9, (-26) \cdot 77) = 1$, altså at $\mathsf{sfd}(9, -2002) = 1$. Ved å benytte Euklids algoritme, finner vi at dette riktignok er sant.

2.9 Lineære diofantiske ligninger

Merknad 2.9.1. La oss se på ligningen

$$x + 2y = 0.$$

Det er lett å finne alle heltallene x og y slik at denne ligningen er sann. For hvert heltall z, er $x = -2z$ og $y = z$ en løsning. Disse er de eneste løsningene. Således har vi for eksempel de følgende løsningene:

(1) $x = 2$ og $y = 1$;

(2) $x = 8$ og $y = 4$;

(3) $x = -18$, $y = -9$.

La oss se istedenfor på ligningen

$$2x + 4y = 3.$$

Det finnes ikke noe heltall x og y slik at denne ligningen er sann. For alle heltall x og y er $2x + 4y$ et partall, mens 3 er et oddetall. Derfor er det umulig at $2x + 4y$ kan være lik 3.

La nå a, b, og c være heltall. Ved hjelp av begrepet «største felles divisor», skal vi i denne delen av kapittelet se på hvordan vi kan finne alle heltallsløsningene til en hvilken som helst ligning

$$ax + by = c.$$

Terminologi 2.9.2. La a, b, og c være heltall. Når vi er interessert i heltall x og y slik at

$$ax + by = c,$$

kalles denne ligningen en *lineær diofantisk ligning.*

Merknad 2.9.3. En stor del av tallteori handler om heltallsløsninger til ligninger. Generelt sett er det veldig vanskelig å finne alle heltallsløsningene til en gitt ligningen: i dagens forskning innen tallteori benytter matematikere svært sofistikerte og abstrakte verktøy for å få en forståelse. Likevel er i mange tilfeller løsningene fremdeles et mysterium.

Proposisjon 2.9.4. La a, b, c være heltall. La d være et naturlig tall slik at $\mathsf{sfd}(a, b) = d$. Fra Korollar 2.7.20 vet vi at det finnes heltall u og v slik at $d = ua + vb$. Anta at $d \mid c$, altså at det finnes et heltall k slik at $c = kd$. Da er $x = ku$ og $y = kv$ en løsning til ligningen

$$ax + by = c.$$

Bevis. Vi regner som følger:

$$\begin{aligned} ax + by &= a(ku) + b(kv) \\ &= k(au + bv) \\ &= kd \\ &= c. \end{aligned}$$

□

Merknad 2.9.5. Dette beviset er lett. Imidlertid er proposisjonen langt fra triviell. Det er Korollar 2.7.20, altså Euklids algoritme, som gir oss muligheten til å løse ligningen

$$ax + by = c$$

når $d \mid c$, ved å fastslå at vi kan finne heltall u og v slik at $d = ua + bv$.

Eksempel 2.9.6. Ved å benytte Euklids algoritme og algoritmen i Merknad 2.7.15, får vi:

(1) $\mathsf{sfd}(63, 49) = 7$;

(2) $7 = (-3) \cdot 63 + 4 \cdot 49$.

Siden $252 = 36 \cdot 7$, har vi i tillegg: $7 \mid 252$. Derfor fastslår Proposisjon 2.9.4 at $x = 36 \cdot (-3)$ og $y = 36 \cdot 4$, altså $x = -108$ og $y = 144$, er en løsning til ligningen

$$63x + 49y = 252.$$

Eksempel 2.9.7. Ved å benytte Euklids algoritme og algoritmen i Merknad 2.7.15, får vi:

(1) $\mathsf{sfd}(286, 455) = 13$;

(2) $13 = 8 \cdot 286 + (-5) \cdot 455$.

Siden
$$-429 = (-33) \cdot 13,$$
har vi i tillegg: $13 \mid -429$. Derfor fastslår Proposisjon 2.9.4 at $x = (-33) \cdot 8$ og $y = (-33) \cdot (-5)$, altså $x = -264$ og $y = 165$, er en løsning til ligningen
$$286x + 455y = -429.$$

Eksempel 2.9.8. Ved å benytte Euklids algoritme og algoritmen i Merknad 2.7.15, får vi:

(1) $\mathsf{sfd}(-24, 136) = 8$;

(2) $8 = (-6) \cdot (-24) + (-1) \cdot 136$.

Siden $1072 = 134 \cdot 8$, har vi i tillegg: $8 \mid 1072$. Derfor fastslår Proposisjon 2.9.4 at $x = 134 \cdot (-6)$ og $y = 134 \cdot (-1)$, altså $x = -804$ og $y = -134$, er en løsning til ligningen
$$-24x + 136y = 1072.$$

Proposisjon 2.9.9. La a, b, c være heltall. La d være et naturlig tall slik at $\mathsf{sfd}(a, b) = d$. La x og y være heltall slik at
$$ax + by = c.$$
Da er $d \mid c$.

Bevis. Ut ifra definisjonen til $\mathsf{sfd}(a, b)$ er $d \mid a$ og $d \mid b$. Derfor finnes det et heltall k_a slik at $a = k_a d$, og et heltall k_b slik at $b = k_b d$. Nå regner vi som følger:
$$\begin{aligned} c &= ax + by \\ &= k_a dx + k_b dy \\ &= (k_a x + k_b y)d. \end{aligned}$$
Dermed er $d \mid c$.

□

Eksempel 2.9.10. Ved å benytte Euklids algoritme får vi: $\mathsf{sfd}(57, 133) = 19$. Siden det ikke er sant at $19 \mid 36$, følger det fra Proposisjon 2.9.9 at ligningen
$$57x + 133y = 36$$
har ingen heltallsløsning.

Eksempel 2.9.11. Vi har: $\mathsf{sfd}(-12, -18) = 6$. Siden det ikke er sant at $6 \mid 10$, følger det fra Proposisjon 2.9.9 at ligningen

$$-12x - 18y = 10$$

har ingen heltallsløsning.

Korollar 2.9.12. La a, b, c være heltall. La d være et naturlig tall slik at $\mathsf{sfd}(a, b) = d$. Ligningen

$$ax + by = c$$

har en heltallsløsning hvis og bare hvis $d \mid c$.

Bevis. Følger umiddelbart fra Proposisjon 2.9.4 og Proposisjon 2.9.9. $\square$

Proposisjon 2.9.13. La a, b, c, x, og y være heltall. Anta at

$$ax + by = c.$$

La d være et naturlig tall slik at $\mathsf{sfd}(a, b) = d$. Ut ifra definisjonen til $\mathsf{sfd}(a, b)$ vet vi at $d \mid a$ og $d \mid b$, altså at det finnes heltall k_a slik at $a = k_a d$, og at det finnes et heltall k_b slik at $b = k_b d$. La x' og y' være heltall slik at

$$ax' + by' = c.$$

Da finnes det et heltall t slik at

$$x' = x + k_b t$$

og

$$y' = y - k_a t.$$

Bevis. Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Siden

$$ax + by = c$$

og

$$ax' + by' = c,$$

er

$$ax + by = ax' + by'.$$

Derfor er

$$by - by' = ax' - ax,$$

altså er

$$b(y - y') = a(x' - x).$$

(2) Siden $a = k_a d$ og $b = k_b d$, følger det fra (1) at

$$(k_b d)(y - y') = (k_a d)(x' - x),$$

altså at

$$d\big(k_b(y - y')\big) = d\big(k_a(x' - x)\big).$$

(3) Det følger fra (2) og Proposisjon 2.2.25 at

$$k_b(y - y') = k_a(x' - x).$$

Dermed er $k_a \mid k_b(y - y')$.

(4) Ut ifra Proposisjon 2.8.13 er $\mathsf{sfd}(k_a, k_b) = 1$.

(5) Det følger fra (3), (4), og Proposisjon 2.8.22 at $k_a \mid y - y'$. Dermed finnes det et heltall t slik at $y - y' = tk_a$.

(6) Det følger fra (3) og (5) at

$$k_a(x' - x) = k_b t k_a,$$

altså

$$k_a(x' - x) = k_a k_b t.$$

(7) Det følger fra (6) og Proposisjon 2.2.25 at $x' - x = k_b t$.

Fra (5) og (7) deduserer vi at

$$x' = x + tk_b$$

og

$$y' = y - tk_a.$$

□

Eksempel 2.9.14. Vi har: $x = 5$ og $y = 3$ er en løsning til ligningen

$$4x - 6y = 2.$$

I tillegg er

$$\mathsf{sfd}(4, -6) = 2.$$

Siden $4 = 2 \cdot 2$, er $k_a = 2$. Siden $-6 = (-3) \cdot 2$, er $k_b = -3$. La x' og y' være heltall slik at

$$4x' - 6y' = 2.$$

Proposisjon 2.9.13 fastsår at det finnes et heltall t slik at $x' = 5 + (-3)t$ og $y' = 3 - 2t$, altså $x' = 5 - 3t$ og $y' = 3 - 2t$.

For eksempel er $x = 68$ og $y = 45$ en løsning til ligningen

$$4x - 6y = 2.$$

Ved å la $t = 21$, er det rikignok sant at $x = 5 - 3t$ og $y = 3 - 2t$.

Eksempel 2.9.15. Vi har: $x = -2$ og $y = 1$ er en løsning til ligningen

$$-9x - 6y = 12.$$

I tillegg er

$$\mathsf{sfd}(-9, -6) = 3.$$

Siden $-9 = (-3) \cdot 3$, er $k_a = -3$. Siden $-6 = (-2) \cdot 3$, er $k_b = -2$. La x' og y' være heltall slik at

$$-9x' - 6y' = 12.$$

Proposisjon 2.9.13 fastsår at det finnes et heltall t slik at $x' = -2+(-2)t$ og $y' = 1-(-3)t$, altså $x' = -2 - 2t$ og $y' = 1 + 3t$.

For eksempel er $x = 30$ og $y = -47$ en løsning til ligningen

$$-9x - 6y = 12.$$

Ved å la $t = -15$, er det rikignok sant at $x = -2 - 2t$ og $y = 1 + 3t$.

Korollar 2.9.16. La a, b, c være heltall. La d være et naturlig tall slik at $\mathsf{sfd}(a, b) = d$. Fra Korollar 2.7.20 vet vi at det finnes heltall u og v slik at $d = ua + vb$. Ut ifra definisjonen til $\mathsf{sfd}(a, b)$ vet vi at $d \mid a$ og $d \mid b$, altså at det finnes heltall k_a slik at $a = k_a d$, og at det finnes et heltall k_b slik at $b = k_b d$. Anta at $d \mid c$, altså at det et heltall k slik at $c = kd$. La x og y være heltall slik at

$$ax + by = c.$$

Da finnes det et heltall t slik at

$$x = ku + k_b t$$

og

$$y = kv - k_a t.$$

Bevis. Ut ifra Proposisjon 2.9.4 er

$$a(ku) + b(kv) = c.$$

Dermed følger utsagnet umiddelbart fra Proposisjon 2.9.13. □

Eksempel 2.9.17. La oss se på ligningen

$$63x + 49y = 252.$$

Som i Eksempel 2.9.6, har vi

(1) $\mathsf{sfd}(63, 49) = 7$;

(2) $7 = (-3) \cdot 63 + 4 \cdot 49$.

Siden $252 = 36 \cdot 7$, har vi i tillegg: $7 \mid 252$ og $k = 36$. Siden $63 = 9 \cdot 7$, er $k_a = 9$. Siden $49 = 7 \cdot 7$, er $k_b = 7$. Dersom x og y er heltall slik at

$$63x + 49y = 252,$$

fastslår Korollar 2.9.16 at det finnes et heltall t slik at $x = 36 \cdot (-3) + 7t$ og $y = 36 \cdot 4 - 9t$, altså $x = -108 + 7t$ og $y = 144 - 9t$.

For eksempel er $x = 39$ og $y = -45$ en løsning til ligningen. Ved å la $t = 21$, er det riktignok sant at $x = -108 + 7t$ og $y = 144 - 9t$.

Eksempel 2.9.18. La oss se på ligningen

$$286x + 455y = -429.$$

Som i Eksempel 2.9.7, har vi

(1) $\mathsf{sfd}(286, 455) = 13$;

(2) $13 = 8 \cdot 286 + (-5) \cdot 455$.

Siden

$$-429 = (-33) \cdot 13,$$

har vi i tillegg: $13 \mid -429$ og $k = -33$.. Siden $286 = 22 \cdot 13$, er $k_a = 13$. Siden $455 = 35 \cdot 13$, er $k_b = 35$. Dersom x og y er heltall slik at

$$286x + 455y = -429,$$

fastslår Korollar 2.9.16 at det finnes et heltall t slik at $x = (-33) \cdot 8 + 35t$ og $y = (-33) \cdot (-5) - 22t$, altså $x = -264 + 35t$ og $y = 165 - 22t$.

For eksempel er $x = 366$ og $y = -231$ en løsning til ligningen. Ved å la $t = 18$, er det riktignok sant at $x = -264 + 35t$ og $y = 165 - 22t$.

Eksempel 2.9.19. La oss se på ligningen

$$-24x + 136y = 1072.$$

Ved å benytte Euklids algoritme og algoritmen i Merknad 2.7.15, får vi:

(1) $\mathsf{sfd}(-24, 136) = 8$;

(2) $8 = (-6) \cdot (-24) + (-1) \cdot 136$.

Siden $1072 = 134 \cdot 8$, har vi i tillegg: $8 \mid 1072$ og $k = 134$. Dersom x og y er heltall slik at

$$-24x + 136y = 1072,$$

fastslår Korollar 2.9.16 at det finnes et heltall t slik at $x = 134 \cdot (-6) + 17t$ og $y = 134 \cdot (-1) + 3t$, altså $x = -804 + 17t$ og $y = -134 + 3t$.

For eksempel er $x = -1025$ og $y = -173$ en løsning til ligningen. Ved å la $t = -13$, er det riktignok sant at $x = -804 + 17t$ og $y = -134 + 3t$.

Proposisjon 2.9.20. La a, b, c, x, og y være heltall. Anta at

$$ax + by = c.$$

La d være et naturlig tall slik at $\mathsf{sfd}(a, b) = d$. Ut ifra definisjonen til $\mathsf{sfd}(a, b)$ vet vi at $d \mid a$ og $d \mid b$, altså at det finnes heltall k_a slik at $a = k_a d$, og at det finnes et heltall k_b slik at $b = k_b d$. For hvert heltall t, er da

$$x' = x + k_b t$$

og

$$y' = y - k_a t$$

en løsning til ligningen

$$ax' + by' = c.$$

Bevis. Vi regner som følger:

$$\begin{aligned} ax' + by' &= a(x + k_b t) + b(y - k_a t) \\ &= ax + by + ak_b t - bk_a t \\ &= ax + by + (ak_b - bk_a)t \\ &= ax + by + \big((k_a d)k_b - (k_b d)k_a\big)t \\ &= ax + by + (k_a k_b d - k_a k_b d)t \\ &= ax + by + 0 \cdot t \\ &= ax + by \\ &= c \end{aligned}$$

□

Eksempel 2.9.21. Som i Eksempel 2.9.14, har vi:

(1) $x = 5$ og $y = 3$ er en løsning til ligningen

$$4x - 6y = 2;$$

(2) $\mathsf{sfd}(4, -6) = 2$;

(3) $k_a = 2$ og $k_b = -3$.

For hvert heltall t, fastslår Proposisjon 2.9.20 at $x = 5 - 3t$ og $y = 3 - 2t$ er en løsning til ligningen

$$63x + 49y = 252.$$

For eksempel er $x = 5 - 3 \cdot 68$ og $y = 3 - 2 \cdot 68$, altså $x = -199$ og $y = -133$, en løsning til ligningen.

Korollar 2.9.22. La a, b, c være heltall. La d være et naturlig tall slik at $\mathsf{sfd}(a, b) = d$. Fra Korollar 2.7.20 vet vi at det finnes heltall u og v slik at $d = ua + vb$. Ut ifra definisjonen til $\mathsf{sfd}(a, b)$ vet vi at $d \mid a$ og $d \mid b$, altså at det finnes heltall k_a slik at $a = k_a d$, og at det finnes et heltall k_b slik at $b = k_b d$. Anta at $d \mid c$, altså at det et heltall k slik at $c = kd$. For hvert heltall t, er da

$$x = ku + k_b t$$

og

$$y = kv - k_a t$$

en løsning til ligningen

$$ax + by = c.$$

Bevis. Ut ifra Proposisjon 2.9.4 er

$$aku + bkv = c.$$

Dermed følger utsagnet umiddelbart fra Proposisjon 2.9.20. □

Eksempel 2.9.23. La oss se på ligingen

$$63x + 49y = 252.$$

Som i Eksempel 2.9.6, har vi:

(1) $\mathsf{sfd}(63, 49) = 7$;

(2) $x = -3$ og $y = 4$ er en løsning til ligningen

$$63x + 49y = 7;$$

(3) $k = 36$;

(4) $k_a = 9$ og $k_b = 7$.

For hvert heltall t, fastslår Korollar 2.9.22 at $x = 36 \cdot (-3) + 7t$ og $y = 36 \cdot 4 + 9t$, altså $x = -108 + 7t$ og $y = 144 - 9t$, er en løsning til ligningen

$$63x + 49y = 252.$$

For eksempel er $x = -108 + 7 \cdot 51$ og $y = 144 - 9 \cdot 51$, altså $x = 249$ og $y = -315$, en løsning til ligningen.

Korollar 2.9.24. La a, b, c, x, og y være heltall. Anta at

$$ax + by = c.$$

La d være et naturlig tall slik at $\mathsf{sfd}(a, b) = d$. Ut ifra definisjonen til $\mathsf{sfd}(a, b)$ vet vi at $d \mid a$ og $d \mid b$, altså at det finnes heltall k_a slik at $a = k_a d$, og at det finnes et heltall k_b slik at $b = k_b d$. Da er heltall x' og y' en løsning til ligningen

$$ax' + by' = c$$

hvis og bare hvis det finnes et heltall t slik at

$$x' = x + k_b t$$

og

$$y' = y - k_a t.$$

Bevis. Følger umiddelbart fra Proposisjon 2.9.13 og Proposisjon 2.9.20. □

Korollar 2.9.25. La a, b, c være heltall. La d være et naturlig tall slik at $\mathsf{sfd}(a, b) = d$. Fra Korollar 2.7.20 vet vi at det finnes heltall u og v slik at $d = ua + vb$. Ut ifra definisjonen til $\mathsf{sfd}(a, b)$ vet vi at $d \mid a$ og $d \mid b$, altså at det finnes heltall k_a slik at $a = k_a d$, og at det finnes et heltall k_b slik at $b = k_b d$. Anta at $d \mid c$, altså at det et heltall k slik at $c = kd$. Da er heltall x og y en løsning til ligningen

$$ax + by = c$$

hvis og bare hvis det finnes et heltall t slik at

$$x = ku + k_b t$$

og

$$y = kv - k_a t.$$

Bevis. Følger umiddelbart fra Korollar 2.9.16 og Korollar 2.9.22. □

Merknad 2.9.26. Ved å ha gitt et bevis for Korollar 2.9.25, har vi rukket en komplett forståelse for løsningene til en hvilken som helst lineær diofantisk ligning.

2.10 Delbarhet og Fibonaccitallene

Merknad 2.10.1. Nå skal vi benytte teorien vi har sett på i dette kapittelet for å utforske Fibonaccitallene videre.

Notasjon 2.10.2. La n være et naturlig tall. I resten av dette kapittelet kommer alltid u_n til å betegne det n-te Fibonaccitallet.

Proposisjon 2.10.3. La n være et naturlig tall. Da er $\mathsf{sfd}(u_n, u_{n+1}) = 1$.

Bevis. Først sjekker vi om proposisjonen er sann når $n = 1$. I dette tilfellet er utsagnet at $\mathsf{sfd}(u_1, u_2) = 1$. Siden $u_1 = 1$ og $u_2 = 1$, er dette sant.

Anta nå at proposisjonen har blitt bevist for et gitt naturlig tall m. Således har det blitt bevist at $\mathsf{sfd}(u_m, u_{m+1}) = 1$. La c være et naturlig tall slik at:

(i) $c \mid u_{m+1}$;

(ii) $c \mid u_{m+2}$.

Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Fra (i) og Proposisjon 2.5.12 følger det at $c \mid -u_{m+1}$.

(2) Ut ifra definisjonen til Fibonaccitallene er $u_{m+2} = u_m + u_{m+1}$. Derfor er $u_m = u_{m+2} - u_{m+1}$.

(3) Fra (ii), (1), (2), og Proposisjon 2.5.24, følger det at $c \mid u_m$.

Fra (3), (i), og antakelsen at $\mathsf{sfd}(u_m, u_{m+1}) = 1$, følger det at $c = 1$.

Dersom $c \mid u_{m+1}$ og $c \mid u_{m+2}$, har vi dermed bevist at $c = 1$. Vi deduserer at $\mathsf{sfd}(u_{m+1}, u_{m+2}) = 1$. Således er proposisjonen sann når $n = m + 1$.

Ved induksjon konkluderer vi at proposisjonen er sann for alle naturlige tall.

□

Eksempel 2.10.4. La n være 5. Da fastslår Proposisjon 2.10.3 at $\mathsf{sfd}(u_5, u_6) = 1$, altså at $\mathsf{sfd}(5, 8) = 1$.

Eksempel 2.10.5. La n være 7. Da fastslår Proposisjon 2.10.3 at $\mathsf{sfd}(u_7, u_8) = 1$, altså at $\mathsf{sfd}(13, 21) = 1$.

Lemma 2.10.6. La n være et naturlig tall. La l være et naturlig tall slik at $l \geq 2$. Da er

$$u_{l+n} = u_{l-1}u_n + u_l u_{n+1}.$$

Bevis. Siden $n \geq 1$, er $n-1 \geq 0$. Siden $l \geq 2$, er $l+1 \geq 3$.Derfor følger det fra Proposisjon 1.14.1 at

$$\begin{aligned} u_{(n-1)+(l+1)} &= u_{(l+1)-1}u_{(n-1)+2} + u_{(l+1)-2}u_{(n-1)+1} \\ &= u_l u_{n+1} + u_{l-1}u_n \\ &= u_{l-1}u_n + u_l u_{n+1}. \end{aligned}$$

Dermed er

$$\begin{aligned} u_{l+n} &= u_{n+l} \\ &= u_{(n-1)+(l+1)} \\ &= u_{l-1}u_n + u_l u_{n+1}. \end{aligned}$$

□

Eksempel 2.10.7. Når $n = 3$ og $l = 7$, fastslår Proposisjon 1.14.1 at

$$u_{10} = u_6 u_3 + u_7 u_4,$$

altså at

$$55 = 8 \cdot 2 + 13 \cdot 3.$$

Eksempel 2.10.8. Når $n = 6$ og $l = 5$, fastslår Proposisjon 1.14.1 at

$$u_{11} = u_4 u_6 + u_5 u_7,$$

altså at

$$89 = 3 \cdot 8 + 5 \cdot 13.$$

Proposisjon 2.10.9. La l og n være naturlige tall. Da har vi: $u_l \mid u_{ln}$.

Bevis. Først sjekker vi om proposisjonen er sann når $n = 1$. I dette tilfellet er utsagnet at

$$u_l \mid u_l.$$

Siden $u_l = 1 \cdot u_l$, er dette sant.

Anta nå at proposisjonen har blitt bevist når n er et gitt naturlig tall m. Således har det blitt bevist at

$$u_l \mid u_{lm}.$$

Ett av følgende utsagn er sant.

(A) $l = 1$;

(B) $l \geq 2$.

Anta først at (A) er tilfellet. Siden $u_1 = 1$, er det sant at $u_1 \mid u_{m+1}$, altså at $u_1 \mid u_{1\cdot(m+1)}$. Dermed er proposisjonen sann når $n = m + 1$ i dette tilfellet.

Anta nå at (B) er tilfellet. Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Vi har:

$$u_{l(m+1)} = u_{lm+l}.$$

(2) Siden $l \geq 2$, følger det fra Lemma 2.10.6 at

$$u_{lm+l} = u_{lm-1} u_l + u_{lm} u_{l+1}.$$

(3) Ut ifra antakelsen at $u_l \mid u_{lm}$ finnes det et heltall k slik at $u_{lm} = k \cdot u_l$.

(4) Det følger fra (2) og (3) at

$$\begin{aligned} u_{lm+l} &= u_{lm-1} u_l + k u_l u_{l+1} \\ &= (u_{lm-1} + k u_{l+1})\, u_l. \end{aligned}$$

(5) Siden hvert Fibonaccitall er et naturlig tall og k er et heltall, er $u_{lm-1} + k u_{l+1}$ et heltall.

(6) Det følger fra (4) og (5) at $u_l \mid u_{lm+l}$.

Dermed har vi bevist at $u_l \mid u_{l(m+1)}$. Således er proposisjonen sann når $n = m + 1$.

Ved induksjon konkluderer vi at proposisjonen er sann når n er et hvilket som helst naturlig tall.

□

Eksempel 2.10.10. Når $l = 3$ og $n = 5$, fastslår Proposisjon 2.10.9 at $u_3 \mid u_{15}$, altså at $2 \mid 610$.

Eksempel 2.10.11. Når $l = 4$ og $n = 3$, fastslår Proposisjon 2.10.9 at $u_4 \mid u_{12}$, altså at $3 \mid 144$.

Korollar 2.10.12. La l og k være naturlige tall slik at $l \mid n$. Da er $u_l \mid u_n$.

Bevis. Siden l og n er naturlige tall, finnes det da et naturlig tall k slik at $n = kl$. Det fra Proposisjon 2.10.9 at $u_l \mid u_{kl}$, altså at $u_l \mid u_n$. □

Eksempel 2.10.13. Vi har: $3 \mid 9$. Derfor er $u_3 \mid u_9$, altså $2 \mid 34$.

Eksempel 2.10.14. Vi har: $6 \mid 12$. Derfor er $u_6 \mid u_{12}$, altså $8 \mid 144$.

Lemma 2.10.15. La k, l, n, og r være naturlige tall slik at $n = kl+r$. Da er $\mathsf{sfd}(u_n, u_l) = \mathsf{sfd}(u_r, u_l)$.

Bevis. Ett av følgende utsagn er sant:

(A) $k = 1$ og $l = 1$;

(B) $kl \geq 2$.

Anta først at (A) er tilfellet. Da er utsagnet at $\mathsf{sfd}(u_n, u_1) = \mathsf{sfd}(u_r, u_1)$. Siden $u_1 = 1$, har vi:

$$\mathsf{sfd}(u_n, u_1) = \mathsf{sfd}(u_n, 1) = 1$$

og

$$\mathsf{sfd}(u_r, u_1) = \mathsf{sfd}(u_r, 1) = 1.$$

Dermed er proposisjonen sann i dette tilfellet.

Anta nå at (B) er tilfellet. Vi skal først bevise at $\mathsf{sfd}(u_{kl-1}, u_l) = 1$. La c være et naturlig tall slik at:

(i) $c \mid u_{kl-1}$;

(ii) $c \mid u_l$.

Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Fra Proposisjon 2.10.9 har vi: $u_l \mid u_{kl}$.

(2) Det følger fra (ii), (1), og Proposisjon 2.5.27 at $c \mid u_{kl}$.

(3) Fra (i), (2), og Proposisjon 2.10.3 følger det at $c = 1$.

Dersom $c \mid u_{kl-1}$ og $c \mid u_l$, har vi dermed bevist at $c = 1$. Derfor er $\mathsf{sfd}(u_{kl-1}, u_l) = 1$.

Nå gjør vi følgende observasjoner.

(1) Siden $kl \geq 2$, følger det fra Lemma 2.10.6 at

$$u_{kl+r} = u_{kl-1}u_r + u_{kl}u_{r+1}.$$

(2) Ut ifra Proposisjon 2.10.9 er $u_l \mid u_{kl}$.

(3) Det følger fra (2) og Korollar 2.5.18 at $u_l \mid u_{r+1}u_{kl}$, altså at $u_l \mid u_{kl}u_{r+1}$.

(4) Det følger fra (3) og Proposisjon 2.6.27 at

$$\mathsf{sfd}(u_{kl-1}u_r + u_{kl}u_{r+1}, u_l) = \mathsf{sfd}(u_{kl-1}u_r, u_l).$$

(5) Vi vet at $\mathsf{sfd}(u_{kl-1}, u_l) = 1$, altså at $\mathsf{sfd}(u_l, u_{kl-1}) = 1$. Det følger fra Proposisjon 2.8.26 at $\mathsf{sfd}(u_l, u_{kl-1}u_r) = \mathsf{sfd}(u_l, u_r)$, altså at $\mathsf{sfd}(u_{kl-1}u_r, u_l) = \mathsf{sfd}(u_r, u_l)$.

Fra (1), (4), og (5) følger det at $\mathsf{sfd}(u_{kl+r}, u_l) = \mathsf{sfd}(u_r, u_l)$, altså at $\mathsf{sfd}(u_n, u_l) = \mathsf{sfd}(u_r, u_l)$.

□

Eksempel 2.10.16. Vi har: $7 = 2 \cdot 3 + 1$. Lemma 2.10.15 fastslår at $\mathsf{sfd}(u_7, u_3) = \mathsf{sfd}(u_3, u_1)$, altså at $\mathsf{sfd}(13, 2) = \mathsf{sfd}(2, 1)$.

Eksempel 2.10.17. Vi har: $13 = 2 \cdot 5 + 3$. Lemma 2.10.15 fastslår at $\mathsf{sfd}(u_{13}, u_5) = \mathsf{sfd}(u_5, u_3)$, altså at $\mathsf{sfd}(233, 5) = \mathsf{sfd}(5, 2)$.

Merknad 2.10.18. Målet vårt er Korollar 2.10.20. Imidlertid skal vi først bevise Proposisjon 2.10.19. Da skal vi observere at Korollar 2.10.20 følger fra Proposisjon 2.10.19.

Sammenlign med Merknad 2.7.4. For hvert par naturlige tall l og s slik at $s < l$, beviser vi på en måte at $\mathsf{sfd}(u_l, u_s) = u_d$ mange ganger: en gang for hvert naturlig tall større enn eller likt l.

Likevel viser det seg at påstanden i Proposisjon 2.10.19 er bedre for å gjennomføre et bevis ved induksjon enn påstanden i Korollar 2.10.20.

Proposisjon 2.10.19. La n være et naturlig tall slik at $n \geq 2$. La s og l være naturlige tall slik at $s < l \leq n$. La $d = \mathsf{sfd}(l, s)$. Da er $\mathsf{sfd}(u_l, u_s) = u_d$.

Bevis. Først sjekker vi om proposisjonen er sann når $n = 2$. La l og s være naturlige tall slik at $s < l \leq 2$. La $d = \mathsf{sfd}(l, s)$. Vi må sjekke om

$$\mathsf{sfd}(u_l, u_s) = u_d.$$

Et par naturlige tall l og s oppfyller kravet $s < l \leq 2$ hvis og bare hvis $s = 1$ og $l = 2$. Derfor må vi sjekke om

$$\mathsf{sfd}(u_2, u_1) = u_{\mathsf{sfd}(2,1)}.$$

Vi har: $\mathsf{sfd}(2,1) = 1$. Siden $u_1 = 1$ og $u_2 = 1$, har vi i tillegg: $\mathsf{sfd}(u_2, u_1) = \mathsf{sfd}(1,1) = 1$. Dermed er utasgnet sant.

Anta nå at proposisjonen har blitt bevist når n er et gitt naturlig tall m slik at $m \geq 2$. La s og l være naturlige tall slik at $s < l \leq m+1$. Ut ifra Proposisjon 2.2.6 finnes det heltall k og r slik at $l = ks + r$, $k \geq 0$, og $0 \leq r < s$. Siden $r < s$ og $s < l$, er $r < l$. Derfor er det faktisk ikke sant at $k = 0$, altså k er et naturlig tall. Ett av følgende utsagn er sant:

(A) $r = 0$;

(B) r er et naturlig tall.

Anta først at (A) er tilfellet. Da er $l = ks$, altså $s \mid l$. Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Det følger fra Proposisjon 2.6.21 at $\mathsf{sfd}(l, s) = s$.

(2) I tillegg følger det fra Korollar 2.10.12 at $u_l \mid u_s$.

(3) Det følger fra (2) og Proposisjon 2.6.21 at $\mathsf{sfd}(u_l, u_s) = u_s$.

Det følger fra (1) og (3) at $\mathsf{sfd}(u_l, u_s) = \mathsf{sfd}(l, s)$. Dermed er proposisjonen sann i dette tilfellet.

Anta nå at (B) er tilfellet. Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Ut ifra Lemma 2.7.3 er $\mathsf{sfd}(l, s) = \mathsf{sfd}(s, r)$.

(2) Siden $s < l \leq m+1$, er $s < m$. La $d = \mathsf{sfd}(s, r)$. Ut ifra antakelsen at proposisjonen er sann når $n = m$, følger det at $\mathsf{sfd}(u_s, u_r) = u_d$.

(3) Ut ifra Lemma 2.10.15 er $\mathsf{sfd}(u_l, u_s) = \mathsf{sfd}(u_s, u_r)$.

Det følger fra (1), (2), og (3) at $\mathsf{sfd}(u_l, u_s) = \mathsf{sfd}(l, s)$. Dermed er proposisjonen sann i dette tilfellet.

□

Korollar 2.10.20. La l og n være naturlige tall. La $d = \mathsf{sfd}(l, n)$. Da er $\mathsf{sfd}(u_l, u_n) = u_d$.

Bevis. Ett av følgende utsagn er sant:

(1) $n = 1$;

(2) $n \geq 2$.

Anta først at $n = 1$. Da er utsagnet at $\mathsf{sfd}(u_l, u_1) = u_{\mathsf{sfd}(l,1)}$. Siden $u_1 = 1$, har vi:

$$\mathsf{sfd}(u_l, u_1) = \mathsf{sfd}(u_l, 1) = 1.$$

I tilleg har vi:

$$u_{\mathsf{sfd}(l,1)} = u_1 = 1.$$

Dermed er proposisjonen sann i dette tilfellet.

Anta nå at $n \geq 2$. Da følger det umiddelbart fra Proposisjon 2.10.19, ved å la l i proposisjonen være n og s i proposisjonen være l, at utsagnet er sant. □

Merknad 2.10.21. La d være den største felles divisoren til det l-te Fibonaccitallet og det n-te Fibonaccitallet. Proposisjon 2.10.19 fastlår at d er også et Fibonaccitall, nemlig det d-te!

Eksempel 2.10.22. Vi har: $\mathsf{sfd}(6, 9) = 3$. Korollar 2.10.20 fastslår at $\mathsf{sfd}(u_6, u_9) = u_3$, altså at $\mathsf{sfd}(8, 34) = 2$.

Eksempel 2.10.23. Vi har: $\mathsf{sfd}(8, 12) = 4$. Korollar 2.10.20 fastslår at $\mathsf{sfd}(u_8, u_{12}) = u_4$, altså at $\mathsf{sfd}(21, 144) = 3$.

Korollar 2.10.24. La l og n være naturlige tall slik at $l \geq 3$ Da er u_n delelig med u_l hvis og bare hvis n er delelig med l.

Bevis. Anta først at u_n er delelig med u_l. Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Siden u_n er delelig med u_l, følger det fra Proposisjon 2.6.21 at $\mathsf{sfd}(u_l, u_n) = u_l$.

(2) Ut ifra Korollar 2.10.20 er $\mathsf{sfd}(u_l, u_n) = u_{\mathsf{sfd}(l,n)}$.

(3) Det følger fra $u_l = u_{\mathsf{sfd}(l,n)}$.

(4) De eneste naturlige tallene $i \neq j$ slik at $u_i = u_j$ er $i = 1$ og $j = 2$.

(5) Siden $l \geq 3$, følger det fra (3) og (4) at $l = \mathsf{sfd}(l, n)$.

Fra definisjonen til $\mathsf{sfd}(l, n)$ har vi: $\mathsf{sfd}(l, n) \mid n$. Dermed har vi: $l \mid n$.

Anta istedenfor at $l \mid n$. Korollar 2.10.12 fastslår at $u_l \mid u_n$.

□

Eksempel 2.10.25. Siden 10 er ikke delelig med 4, følger det fra Korollar 2.10.24 er u_{10} er ikke delelig med u_4, altså er 55 ikke delelig med 3.

Eksempel 2.10.26. Siden 54 er ikke delelig med 23, følger det fra Korollar 2.10.24 er u_{54} er ikke delelig med u_{23}.

O2 Oppgaver – Delbarhet

O2.1 Oppgaver i eksamens stil

Oppgave O2.1.1. La n være et partall. Bevis at det er et heltall m slik at enten $n^2 = 8m$ eller $n^2 = 8m + 4$.

Oppgave O2.1.2. La n være et heltall. Bevis at det er et heltall m slik at enten $n^4 = 5m$ eller $n^4 = 5m + 1$. *Tips*: Benytt Proposisjon 1.9.30 i løpet av svaret ditt.

Oppgave O2.1.3. La n være et heltall. Anta at det er heltall s slik at $n = s^3$. Anta i tillegg at det er et heltall t slik at $n = t^2$. Bevis at det er et heltall m slik at enten $n = 7m$ eller $n = 7m + 1$. *Tips*: Gjør følgende.

(1) Bevis at det er et heltall m slik at et av de følgende utsagnene er sant:

- (i) $n = 7m$;
- (ii) $n = 7m + 1$;
- (iii) $n = 7m + 6$.

Benytt Proposisjon 1.9.30 og antakelsen at $n = s^3$ i løpet av svaret ditt.

(2) Bevis at det er et heltall m' slik at et av de følgende utsagnene er sant:

- (i) $n = 7m'$;
- (ii) $n = 7m' + 1$;
- (iii) $n = 7m' + 2$;
- (iv) $n = 7m' + 4$;

Benytt antakelsen at $n = t^2$ i løpet av svaret ditt.

(3 Benytt Korollar 2.2.20 ved å la l være 7.

Oppgave O2.1.4. La n være et naturlig tall.

(1) Bevis at $7n^2 + 7n + 4$ er et partall.

(2) Bevis at $n(7n^2 + 5)$ er delelig med 6.

Tips: Benytt induksjon i beviset for (2). Sjekk i tillegg om ligningen

$$(m + 1)(7m^2 + 14m + 12) = m(7m^2 + 5) + (21m^2 + 21m + 12)$$

er sann for et hvilket som helst naturlig tall, og benytt denne ligningen i løpet av svaret ditt.

Oppgave O2.1.5. La l og n være heltall. Anta at $l \mid n$. Bevis at $l \mid -n$.

Oppgave O2.1.6. La l, l', n, og n' være heltall. Anta at $l \mid n$ og $l' \mid n'$. Bevis at $l \cdot l' \mid n \cdot n'$.

Oppgave O2.1.7. La l være et heltall, og la n være et heltall slik at $n \neq 0$. Anta at $l \mid n$. Ved å benytte Proposisjon 2.5.30, bevis at $|l| \leq |n|$.

Oppgave O2.1.8. La l, m, og n være heltall. La d være et naturlig tall slik at $\mathsf{sfd}(l, n) = d$. Anta at $n \mid m$. Bevis at $\mathsf{sfd}(l + m, n) = d$. *Tips*: Benytt ligningen $l = (l + m) - m$ i løpet av beviset ditt.

Oppgave O2.1.9. For hvert av de følgende heltallene l og n, finn $\mathsf{sfd}(l, n)$, og finn heltall u og v slik at $\mathsf{sfd}(l, n) = ul + vn$. Benytt Euklids algoritme i løpet av svarene dine.

(1) $l = 231$, $n = 616$.

(2) $l = -153$, $n = 391$.

(3) $l = -168$, $n = -420$,

Oppgave O2.1.10. La l, m, og n være heltall. La d være et naturlig tall slik at $\mathsf{sfd}(l, m) = d$. Anta at $\mathsf{sfd}(l, n) = 1$. Bevis at $\mathsf{sfd}(l, mn) = d$. *Tips*: Gjør først følgende, og benytt da (3) i løpet av beviset ditt.

(1) La c være et heltall slik at $c \mid l$, og la s være et heltall. Bevis at $\mathsf{sfd}(c, s) \leq \mathsf{sfd}(l, s)$.

(2) La c være et heltall slik at $c \mid l$. Deduser fra (1) og antakelsen at $\mathsf{sfd}(l, n) = 1$ at $\mathsf{sfd}(c, n) = 1$.

(3) Dersom c er et naturlig tall slik at $c \mid mn$, deduser fra (2) og Proposisjon 2.8.22 at $c \mid m$.

Oppgave O2.1.11. For hver av de følgende ligningene, finn en heltallsløsning dersom det er mulig. Hvis det ikke er mulig, forklar hvorfor.

(1) $396x - 165y = 462$.

(2) $-546x + 312y = -317$.

(3) $288x + 186y = 6138$.

Oppgave O2.1.12. Finn alle heltallsløsningene til de følgende ligningene.

(1) $-371x + 28y = 119$.

(2) $15x - 33y = 28$.

(3) $1126x + 441y = -135$.

Oppgave O2.1.13. For et hvilket som helst naturlig tall r, la u_r betegne det r-te Fibonaccitallet. Finn $\mathsf{sfd}(u_{2793}, u_{462})$.

Oppgave O2.1.14. For et hvilket som helst naturlig tall r, la u_r betegne det r-te Fibonaccitallet. La l og n være naturlige tall. Anta at $\mathsf{sfd}(l, n) = 1$. Bevis at $u_l u_n \mid u_{ln}$.

O2.2 Oppgaver for å hjelpe med å forstå kapittelet

Oppgave O2.2.1. Hva er absoluttverdiene til de følgende heltallene:

(1) -83;

(2) 45;

(3) 6;

(4) -1257.

Oppgave O2.2.2. Beskriv hvordan divisjonsalgoritmen ser ut i de følgende tilfellene:

(1) $n = 8$ og $l = 5$;

(2) $n = 11$ og $l = 3$;

(3) $n = 10$ og $l = 5$.

Tips: Se Eksempel 2.2.8 – Eksempel 2.2.10.

Oppgave O2.2.3. Beskriv hvordan beviset for Korollar 2.2.11 ser ut i de følgende tilfellene:

(1) $n = -9$ og $l = 4$.

(2) $n = 8$ og $l = -3$.

(3) $n = -13$ og $l = -5$.

(4) $n = -10$ og $l = 2$.

Tips: Se Eksempel 2.2.12 – 2.2.14.

Oppgave O2.2.4. Hvilke heltall k og r får vi ved å bruke divisjonsalgoritmen når:

(1) $n = 348$ og $l = 39$,

(2) $n = 179$ og $l = 7$?

Tips: Se Merknad 2.2.17 og eksemplene som følger den.

Oppgave O2.2.5. Hvilke heltall k og r får vi ved å bruke divisjonsalgoritmen når:

(1) $n = 79$ og $l = -12$,

(2) $n = -87$ og $l = -11$,

(3) $n = -134$ og $l = -46$?

Tips: Se Merknad 2.2.21 og eksemplene som følger den.

Oppgave O2.2.6. Hvilke av de følgende heltallene er partall, og hvilke er oddetall? Som i Eksempel 2.3.3 – Eksempel 2.3.5, begrunn svaret ditt ved å referere til Terminologi 2.3.1.

(1) 46.

(2) -53

(3) -4.

(4) 16.

Oppgave O2.2.7. Hva fastslår Proposisjon 2.4.2 når $n = 15$? Hva er m i dette tilfellet? Gå gjennom beviset for Proposisjon 2.4.2 ved å erstatte n med 15. Hvilket at utsagnene (1) og (2) stemmer? Hva er k i dette tilfellet?

Oppgave O2.2.8. Hva fastslår Proposisjon 2.4.2 når $n = 20$? Hva er m i dette tilfellet? Gå gjennom beviset for Proposisjon 2.4.2 ved å erstatte n med 20. Hvilket at utsagnene (1) og (2) stemmer? Hva er k i dette tilfellet?

Oppgave O2.2.9. Hva fastslår Proposisjon 2.4.2 når $n = -10$? Hva er m i dette tilfellet? Gå gjennom beviset for Proposisjon 2.4.2 ved å erstatte n med -10. Hvilket at utsagnene (1) og (2) stemmer? Hva er k i dette tilfellet?

Oppgave O2.2.10. Hva fastslår Proposisjon 2.4.2 når $n = -5$? Hva er m i dette tilfellet? Gå gjennom beviset for Proposisjon 2.4.2 ved å erstatte n med -5. Hvilket at utsagnene (1) og (2) stemmer? Hva er k i dette tilfellet?

Oppgave O2.2.11. Hva fastslår Proposisjon 2.4.9 når $n = 7$? Hva er m i dette tilfellet? Gå gjennom beviset for Proposisjon 2.4.2 ved å erstatte n med 7. Hvilket at utsagnene (1) og (2) stemmer? Hva er k i dette tilfellet?

Oppgave O2.2.12. Hva fastslår Proposisjon 2.4.9 når $n = 13$? Hva er m i dette tilfellet? Gå gjennom beviset for Proposisjon 2.4.2 ved å erstatte n med 13. Hvilket at utsagnene (1) og (2) stemmer? Hva er k i dette tilfellet?

Oppgave O2.2.13. Hva fastslår Proposisjon 2.4.9 når $n = -5$? Hva er m i dette tilfellet? Gå gjennom beviset for Proposisjon 2.4.2 ved å erstatte n med -5. Hvilket at utsagnene (1) og (2) stemmer? Hva er k i dette tilfellet?

Oppgave O2.2.14. Hva fastslår Proposisjon 2.4.9 når $n = -9$? Hva er m i dette tilfellet? Gå gjennom beviset for Proposisjon 2.4.2 ved å erstatte n med -9. Hvilket at utsagnene (1) og (2) stemmer? Hva er k i dette tilfellet?

Oppgave O2.2.15. Hva fastslår Proposisjon 2.4.16 når $n = 5$? Hva er m i dette tilfellet? Gå gjennom beviset for Proposisjon 2.4.2 ved å erstatte n med 5. Hvilket at utsagnene (1) og (2) stemmer? Hva er k i dette tilfellet?

Oppgave O2.2.16. Hva fastslår Proposisjon 2.4.16 når $n = 10$? Hva er m i dette tilfellet? Gå gjennom beviset for Proposisjon 2.4.2 ved å erstatte n med 10. Hvilket at utsagnene (1) og (2) stemmer? Hva er k i dette tilfellet?

Oppgave O2.2.17. Hva fastslår Proposisjon 2.4.16 når $n = -12$? Hva er m i dette tilfellet? Gå gjennom beviset for Proposisjon 2.4.2 ved å erstatte n med -12. Hvilket at utsagnene (1) og (2) stemmer? Hva er k i dette tilfellet?

Oppgave O2.2.18. Hva fastslår Proposisjon 2.4.16 når $n = -5$? Hva er m i dette tilfellet? Gå gjennom beviset for Proposisjon 2.4.2 ved å erstatte n med -5. Hvilket at utsagnene (1) og (2) stemmer? Hva er k i dette tilfellet?

Oppgave O2.2.19. For hvert av de de følgende heltallene l og n, vis at $l \mid n$.

(1) $l = 19$, $n = 57$.

(2) $l = 6$, $n = -48$.

(3) $l = -21$, $n = 42$.

(4) $l = -26$, $n = -78$.

Oppgave O2.2.20. Hvilket steg i beviset for Proposisjon 2.6.21 ikke stemmer om vi antar at l er et heltall heller enn et naturlig tall?

Oppgave O2.2.21. Gi et eksempel for å vise at Proposisjon 2.8.8 ikke stemmer om vi bytter 1 med 3.

Oppgave O2.2.22. Gi et eksempel for å vise at Proposisjon 2.8.22 ikke stemmer om vi antar at $\mathsf{sfd}(l, n) = 3$.