MA1301 Tallteori — Høsten 2014 — Løsninger til Midtsemesterprøven

Richard Williamson

6. oktober 2014

Innhold

Oppgave 1

a)

De første fem Fibonaccitallene er:

$$1, 1, 2, 3, 5.$$

b)

Først sjekker vi om utsagnet er sant når $n = 1$. I dette tilfellet er utsagnet at

$$u_{2\cdot 1} = u_{2\cdot 1+1} - 1,$$

altså at

$$u_2 = u_3 - 1.$$

Siden $u_2 = 1$ og

$$u_3 - 1 = 2 - 1 = 1,$$

er dette sant.

Anta nå at utsagnet har blitt bevist når $n = m$, hvor m er et gitt naturlig tall. Således har det blitt bevist at

$$u_2 + u_4 + \cdots + u_{2m} = u_{2m+1} - 1.$$

Da er

$$\begin{aligned} u_2 + u_4 + \cdots + u_{2m} + u_{2(m+1)} &= \big(u_{2m+1} - 1\big) + u_{2(m+1)} \\ &= u_{2m+1} + u_{2m+2} - 1. \end{aligned}$$

Ut ifra definisjonen til Fibonaccitallene er

$$u_{2m+1} + u_{2m+2} = u_{2m+3}$$

Dermed er

$$u_2 + u_4 + \cdots + u_{2m} + u_{2(m+1)} = u_{2m+3} - 1 = u_{2(m+1)+1} + 1.$$

Således har vi bevist at utsagnet er sant når $n = m + 1$.

Ved induksjon konkluderer vi at utsagnet er sant for et hvilket som helst naturlig tall n.

Oppgave 2

a)

Ut ifra antakelsen at $n = 5k + 3$ er

$$\begin{aligned} n^2 &= (5k+3)^2 \\ &= 25k^2 + 30k + 9 \\ &= (25k^2 + 30k + 5) + 4 \\ &= 5\big(5k^2 + 6k + 1\big) + 4. \end{aligned}$$

La m være $5k^2 + 6k + 1$. Dermed er

$$n^2 = 5m + 4.$$

Siden k er et heltall, er m et heltall.

b)

Ut ifra divisjonsalgoritmen er det et heltall k og et heltall r slik at:

(1) $n = 5k + r$;

(2) $0 \leq r < 5$.

Dermed er det et heltall k slik at ett av de følgende utsagnene er sant:

(A) $n = 5k$;

(B) $n = 5k + 1$;

(C) $n = 5k + 2$;

(D) $n = 5k + 3$;

(E) $n = 5k + 4$.

Anta først at (A) er sant. Da er

$$\begin{aligned} n^2 &= (5k)^2 \\ &= 5(5k^2). \end{aligned}$$

La m være $5k^2$. Da er $n^2 = 5m$. Siden k er et heltall, er m er heltall.

Anta nå at (B) er sant. Da er

$$\begin{aligned} n^2 &= (5k + 1)^3 \\ &= 25k^2 + 10k + 1 \\ &= 5(5k^2 + 2k) + 1 \end{aligned}$$

La m være $5k^2 + 2k$. Da er $n^2 = 5m + 1$. Siden k er et heltall, er m et heltall.

Anta nå at (C) er sant. Da er

$$\begin{aligned} n^2 &= (5k + 2)^2 \\ &= 25k^2 + 20k + 4 \\ &= 5(5k^2 + 4k) + 4. \end{aligned}$$

La m være $5k^2 + 4k$. Da er $n^2 = 5m + 4$. Siden k er et heltall, er m et heltall.

Anta nå at (D) er sant. Fra a) vet vi at det er et heltall m slik at $n^2 = 5m + 4$.

Anta nå at (E) er sant. Da er

$$\begin{aligned} n^2 &= (5k + 4)^2 \\ &= 25k^2 + 40k + 16 \\ &= 25k^2 + 40k + 15 + 1 \\ &= 5(5k^2 + 8k + 3) + 1. \end{aligned}$$

La m være $5k^2 + 8k + 3$. Da er $n^2 = 5m + 1$. Siden k er et heltall, er m et heltall.

Andre bevis er mulige. For eksempel kan kongruenser benyttes.

Oppgave 3

a)

Først benytter vi Euklids algoritme for å finne $\mathsf{sfd}(295, -126)$.

(1) Vi har:

$$295 = 2 \cdot 126 + 43.$$

Derfor er $\mathsf{sfd}(295, 126) = \mathsf{sfd}(126, 43)$.

(2) Vi har:

$$126 = 2 \cdot 43 + 40.$$

Derfor er $\mathsf{sfd}(126, 43) = \mathsf{sfd}(43, 40)$.

(3) Vi har:

$$43 = 1 \cdot 40 + 3.$$

Derfor er $\mathsf{sfd}(43, 40) = \mathsf{sfd}(40, 3)$.

(4) Vi har:

$$40 = 13 \cdot 3 + 1.$$

Derfor er $\mathsf{sfd}(40, 3) = \mathsf{sfd}(3, 1)$.

(5) Vi har: $\mathsf{sfd}(3, 1) = 1$.

Dermed er

$$\mathsf{sfd}(295, 126) = 1.$$

Derfor er

$$\mathsf{sfd}(295, -126) = 1.$$

Siden $1 \mid 27$, har ligningen en heltall-løsning. For å beskrive den, finner vi heltall u og v slik at

$$1 = 295u - 126v$$

på følgende måte.

(1) Siden

$$295 = 2 \cdot 126 + 43,$$

er

$$43 = 1 \cdot 295 + (-2) \cdot 126.$$

(2) Siden

$$126 = 2 \cdot 43 + 40,$$

er

$$\begin{aligned} 40 &= -2 \cdot 43 + 126 \\ &= -2 \cdot \big(1 \cdot 295 + (-2) \cdot 126\big) + 126 \\ &= (-2) \cdot 295 + 5 \cdot 126. \end{aligned}$$

(3) Siden
$$43 = 1 \cdot 40 + 3,$$
er
$$\begin{aligned} 3 &= -1 \cdot 40 + 43 \\ &= -1 \cdot \big(5 \cdot 126 + (-2) \cdot 295\big) + \big((-2) \cdot 126 + 1 \cdot 295\big) \\ &= 3 \cdot 295 + (-7) \cdot 126. \end{aligned}$$

(4) Siden
$$40 = 13 \cdot 3 + 1,$$
er
$$\begin{aligned} 1 &= -13 \cdot 3 + 40 \\ &= -13 \cdot \big((-7) \cdot 126 + 3 \cdot 295\big) + \big(5 \cdot 126 + (-2) \cdot 295\big) \\ &= (-41) \cdot 295 + 96 \cdot 126. \end{aligned}$$

Dermed er
$$1 = (-41) \cdot 295 + (-96) \cdot (-126).$$
Siden $27 = 27 \cdot 1$, følger det fra en proposisjon i kurset at
$$x = 27 \cdot (-41)$$
og
$$y = 27 \cdot (-96),$$
altså
$$x = -1107$$
og
$$y = -2592,$$
er en løsning til ligningen.

b)

Siden $\mathsf{sfd}(295, -126) = 1$, og siden $1 \mid c$ for et hvilket som helst heltall c, følger det fra en proposisjon i kurset at ligningen har en løsning. Derfor er utsagnet riktig.

Oppgave 4

a)

Vi har: $7 - (-1) = 8$, og $8 \mid 8$.

b)

Siden $7 \equiv -1 \pmod 8$, er $7^{33} \equiv (-1)^{33} \pmod 8$. Siden $(-1)^{33} = -1$, konkluderer vi at

$$7^{33} \equiv -1 \pmod 8.$$

c)

Vi gjør følgende observasjoner.

(1) Vi har: $9 \equiv 1 \pmod 8$, altså $3^2 \equiv 1 \pmod 8$. Derfor er $\left(3^2\right)^{38} \equiv 1^{38} \pmod 8$, altså

$$3^{76} \equiv 1 \pmod 8.$$

Derfor er

$$3 \cdot 3^{76} \equiv 3 \cdot 1 \pmod 8,$$

altså

$$3^{77} \equiv 3 \pmod 8.$$

(3) Fra b) har vi: $7^{33} \equiv -1 \pmod 8$. Derfor er $3 \cdot 7^{33} \equiv 3 \cdot (-1) \pmod 8$, altså

$$3 \cdot 7^{33} \equiv -3 \pmod 8.$$

Det følger fra (1) – (3) at

$$3^{77} + 3 \cdot 7^{33} \equiv 3 - 3 \pmod 8,$$

altså

$$3^{77} + 3 \cdot 7^{33} \equiv 0 \pmod 8.$$

Dermed er $3^{77} + 3 \cdot 7^{33}$ delelig med 8.