Løsninger – Repetisjonsoppgaver II

Løsning til Oppgave 1. Først sjekker vi om utsagnet er sant når $n = 1$. I dette tilfellet er utsagnet at

$$2^{4\cdot 1} \equiv 1 \pmod{15},$$

altså at

$$2^4 \equiv 1 \pmod{15}.$$

Siden $2^4 = 16$ og

$$16 \equiv 1 \pmod{15},$$

er dette riktignok sant.

Anta at utsagnet har blitt bevist når $n = m$, hvor m er et gitt naturlig tall. Således har det blitt bevist at

$$2^{4m} \equiv 1 \pmod{15}.$$

Da er

$$\begin{aligned} 2^{4(m+1)} &= 2^{4m+4} \\ &= 2^{4m} \cdot 2^4 \\ &\equiv 1 \cdot 2^4 \pmod{15}. \end{aligned}$$

Vi har:

$$1 \cdot 2^4 = 16 \equiv 1 \pmod{15}.$$

Dermed er

$$2^{4(m+1)} \equiv 1 \pmod{15}.$$

Således er utsagnet sant når $n = m + 1$.

Ved induksjon konkluderer vi at utsagnet er sant for et hvilket som helst naturlig tall n.

Merknad. Det er lett å løse Oppgave 1 uten å benytte induksjon. Vi har

$$2^{4m} = \left(2^4\right)^m = 16^m \equiv 1^m = 1 \pmod{15}.$$

Løsning til Oppgave 2. Først sjekker vi om utsagnet er sant når $n = 2$ og $n = 3$. Når $n = 2$ er utsagnet:

$$v_2 = u_3 + u_1.$$

Siden $v_2 = 3$ og $u_3 - u_1 = 2 + 1 = 3$, er dette riktignok sant.

Når $n = 3$ er utsagnet:

$$v_3 = u_4 + u_2.$$

Siden $v_3 = 4$ og $u_4 = u_3 + u_2 = 3 + 1 = 4$, er dette riktignok sant.

Anta at utsagnet har blitt bevist når $n = m - 1$ og når $n = m$, hvor m er et gitt naturlig tall slik at $m \geq 3$. Således har det blitt bevist at

$$v_{m-1} = u_m + u_{m-2}$$

og at

$$v_m = u_{m+1} + u_{m-1}.$$

Ut ifra definisjonen til v_{m+1}, er

$$v_{m+1} = v_m + v_{m-1}.$$

Dermed er

$$\begin{aligned} v_{m+1} &= v_m + v_{m-1} \\ &= (u_{m+1} + u_{m-1}) + (u_m + u_{m-2}) \\ &= (u_{m+1} + u_m) + (u_{m-1} + u_{m-2}) \, . \end{aligned}$$

Ut ifra definisjonen til u_{m+2}, er

$$u_{m+2} = u_{m+1} + u_m.$$

Ut ifra definisjonen til u_m er

$$u_m = u_{m-1} + u_{m-2}.$$

Derfor er

$$(u_{m+1} + u_m) + (u_{m-1} + u_{m-2}) = u_{m+2} + u_m = u_{(m+1)+1} + u_{(m+1)-1}.$$

Dermed er

$$v_{m+1} = u_{(m+1)+1} + u_{(m+1)-1}.$$

Således er utsagnet sant når $n = m + 1$.

Ved induksjon konkluderer vi at utsagnet er sant for et hvilket som helst naturlig tall n slik at $n \geq 2$.

Løsning til Oppgave 3. Først sjekker vi om utsagnet er sant når $n = 1$. I dette tilfellet er utsagnet at

$$u_2 = u_{2+1} - u_2,$$

altså at

$$u_2 = u_3 - u_2.$$

Siden $u_2 = 1$ og $u_3 - u_2 = 2 - 1 = 1$, er dette riktignok sant.

Anta at utsagnet har blitt bevist når $n = m$, hvor m er et gitt naturlig tall. Således har det blitt bevist at

$$u_2 + 2u_4 + 3u_6 + \cdots + mu_{2m} = mu_{2m+1} - u_{2m}.$$

Da er

$$\begin{aligned}
&u_2 + 2u_4 + 3u_6 + \cdots + mu_{2m} + (m+1)u_{2(m+1)} \\
&= (mu_{2m+1} - u_{2m}) + (m+1)u_{2(m+1)} \\
&= mu_{2m+1} - u_{2m} + mu_{2(m+1)} + u_{2(m+1)} \\
&= mu_{2m+1} - u_{2m} + mu_{2m+2} + u_{2m+2} \\
&= mu_{2m+1} + mu_{2m+2} - u_{2m} + u_{2m+2} \\
&= m\left(u_{2m+1} + u_{2m+2}\right) - u_{2m} + u_{2m+2}.
\end{aligned}$$

Ut ifra definisjonen til u_{2m+3}, er $u_{2m+3} = u_{2m+1} + u_{2m+2}$. Dermed er

$$m\left(u_{2m+1} + u_{2m+2}\right) - u_{2m} + u_{2m+2} = mu_{2m+3} - u_{2m} + u_{2m+2}.$$

Ut ifra definisjonen til u_{2m+2}, er

$$u_{2m+2} = u_{2m} + u_{2m+1},$$

altså er

$$u_{2m} = u_{2m+2} - u_{2m+1}.$$

Da er

$$\begin{aligned}
mu_{2m+3} - u_{2m} + u_{2m+2} &= mu_{2m+3} - \left(u_{2m+2} - u_{2m+1}\right) + u_{2m+2} \\
&= mu_{2m+3} - u_{2m+2} + u_{2m+1} + u_{2m+2} \\
&= mu_{2m+3} + u_{2m+1}.
\end{aligned}$$

Det følger fra ligningen

$$u_{2m+3} = u_{2m+1} + u_{2m+2}$$

at

$$u_{2m+1} = u_{2m+3} - u_{2m+1}.$$

Derfor er

$$\begin{aligned}
mu_{2m+3} + u_{2m+1} &= mu_{2m+3} + \left(u_{2m+3} - u_{2m+1}\right) \\
&= (m+1)u_{2m+3} - u_{2m+1} \\
&= u_{2(m+1)} - u_{2(m+1)-1}.
\end{aligned}$$

Dermed er

$$u_2 + 2u_4 + 3u_6 + \cdots + mu_{2m} + (m+1)u_{2(m+1)} = u_{2(m+1)} - u_{2(m+1)-1}.$$

Således er utsagnet sant når $n = m + 1$.

Ved induksjon konkluderer vi at utsagnet er sant for et hvilket som helst naturlig tall n.

Løsning til Oppgave 4. Først sjekker vi om utsagnet er sant når $n = 1$ og $n = 2$. Når $n = 1$ er utsagnet:

$$2^{1-1}u_1 \equiv 1 \pmod 5,$$

altså at

$$2^0 u_1 \equiv 1 \pmod 5$$

Siden $u_1 = 1$, er $2^0 u_1 = 1 \cdot 1 = 1$, altså er det riktignok sant at

$$2^0 u_1 \equiv 1 \pmod 5.$$

Når $n = 2$ er utsagnet:

$$2^{2-1}u_2 \equiv 2 \pmod 5,$$

altså at

$$2u_2 \equiv 2 \pmod 5.$$

Siden $u_2 = 1$, er $2u_2 = 2\dot{1} = 2$, altså er det riktignok sant at

$$2u_2 \equiv 1 \pmod 5.$$

Anta at utsagnet har blitt bevist når $n = m - 1$ og når $n = m$, hvor m er et gitt naturlig tall slik at $m \geq 2$. Således har det blitt bevist at

$$2^{m-2}u_{m-1} \equiv m - 1 \pmod 5$$

og at

$$2^{m-1}u_m \equiv m \pmod 5.$$

Ut ifra definisjonen til u_{m+1}, er

$$u_{m+1} = u_m + u_{m-1}.$$

Dermed er

$$\begin{aligned}
2^{(m+1)-1}u_{m+1} &= 2^m u_{m+1} \\
&= 2^m \left(u_{m-1} + u_m\right) \\
&= 2^m u_{m-1} + 2^m u_m \\
&= 2^2 \left(2^{m-2}u_{m-1}\right) + 2\left(2^{m-1}u_m\right) \\
&\equiv 2^2 \cdot (m-1) + 2 \cdot m \pmod 5
\end{aligned}$$

Vi har:

$$2^2 \cdot (m-1) + 2 \cdot m = 4(m-1) + 2m = 6m - 4 \equiv m + 1 \pmod 5.$$

Dermed er

$$2^{(m+1)-1}u_{m+1} \equiv m + 1 \pmod 5.$$

Således er utsagnet sant når $n = m + 1$.

Ved induksjon konkluderer vi at utsagnet er sant for et hvilket som helst naturlig tall.