MA1301 Tallteori — Høsten 2014 — Oversikt over pensumet for midtsemesterprøven

Richard Williamson

3. oktober 2014

Innhold

Pensumet

Pensumet for midtsemesterprøven er: Kapittel 1, Kapittel 2, og delene 3.1 – 3.3 av Kapittel 3 av forelesningsnotatene. Øvingene som er relevante er 1–6.

Generelle råd

Hvordan bør jeg forberede meg?

Det viktigste er å prøve så godt du kan å forstå alt i forelesningsnotatene, og å kunne løse alle oppgavene i Øving 1–6.

Du kan også øve deg på oppgaver fra tidligere midtsemesterprøver. Ikke alle av disse oppgavene er relevante: mer spesifikk informasjon er gitt i de delene av denne oversikten som handler om de individuelle kapitlene av forelesningsnotatene.

Oppgavene i Øving 1–6 bør prioriteres over oppgavene fra tidligere midtsemesterprøver.

Hva slags oppgaver blir det i prøven?

Oppgavene i prøven ligner på oppgavene i øvingene. Imidlertid blir det ikke noen «teoretiske» oppgave, som ligner på Oppgave 1 og Oppgave 3 i Øving 5, eller Oppgaver 5–7 i Øving 4.

Det er svært viktig at du kan løse alle oppgavene i Øving 1–6 bortsett fra de «teoretiske» oppgavene nevnte ovenfor. Benytt løsningene som har blitt lagt ut for å se hvordan besvarelene dine kan forbedres.

De «teoretiske» oppgavene er også viktige, men ikke direkte relevante for midtsemesterprøven.

Bør vi pugge forelesningsnotatene?

Det er ikke nødvendig å pugge proposisjonene, teoremene, osv, i forelesningsnotatene. Målet med prøven er å eksaminere forståelsen din, ikke hukommelsen din.

Derimot må noen definisjoner huskes. Hvis du imidlertid har gjort en god innsats for å forstå forelesningsnotatene og å prøve å løse oppgavene i øvingene, blir dette ikke noe problem.

Mer spesifikk informasjon om definisjonene som behøves er gitt i de delene av denne oversikten som handler om de individuelle kapitlene av forelesningsnotatene.

Bruk ord!

En rekke symboler er ikke en gyldig løsning til en oppgave! Forklar hva du gjør *ved å bruke ord*. Du kommer svært sjeldent til å få alle poengene for en løsning om det ikke er noen ord for å knytte argumentet ditt sammen.

Det er spesielt viktig å bruke ord når du gjennomfører et bevis ved induksjon. For mer om dette, se «Andre kommentarer» i delen «Kapittel 1» nedenfor.

Kapittel 1

Hovedtemaene

(1) Hvordan gjennomføre et bevis ved induksjon. Dette gjelder alle variantene av induksjon.

(2) Hvordan definere en sekvens av heltall ved rekursjon.

Det viktigste

I dette kapittelet finnes det mange proposisjoner om de naturlige tallene og om Fibonaccitallene. Mange av disse proposisjonene er ikke så veldig viktige i seg selv: det aller viktigste er at du forstår hvordan induksjon benyttes for å bevise dem.

De proposisjonene og definisjonene som er viktige i seg selv, for eksempel fordi vi kommer til å benytte dem andre steder i kurset, er notert nedenfor.

Det som må huskes er markert.

(1) Definisjon 1.1.1 (Naturlige tall) og Definisjon 1.1.3 (Heltall). Må huskes.

(2) Terminologi 1.4.2 (Induksjon). Du blir ikke bedt om å gi denne abstrakte fremstillingen av induksjon, men må forstå den. Det vil si at du må fortstå og huske hvordan oppskriften i Terminologi 1.4.2 benyttes i praksis.

(3) Notasjon 1.6.1 (Summetegnet). Det er ikke nødvendig å huske den abstrakte fremstillingen, men du forstå og huske hvordan notasjonen benyttes i praksis.

(4) Definisjon 1.8.1 (Fakultet).

(5) Definisjon 1.9.2 (Binomialkoeffisientene).

(6) Proposisjon 1.9.18 (Pascals formel).

(7) Proposisjon 1.9.30 (Binomialteoremet). Spesielt viktig: vi benytter den også! Formelen blir gitt om den behøves.

(8) Terminologi 1.10.2 (Rekursjon). Som i (2), blir du ikke bedt om å gi denne abstrakte fremstillingen av rekursjon, men må forstå den. Det vil si at du må fortstå og huske hvordan oppskriften i Terminologi 1.10.2 benyttes i praksis.

(9) Definisjon 1.11.1 (Fibonaccitall).

(10) Proposisjon 1.12.9 (Binets formel).

(11) Terminologi 1.13.2 (Varianter av induksjon). Som i (2) og (7), blir du ikke bedt om å gi denne abstrakte fremstillingen av varianter av induksjon, men må forstå den. Det vil si at du må fortstå og huske hvordan oppskriften i Terminologi 1.13.2 benyttes i praksis.

Relevante oppgaver i øvingene

Alle oppgavene i Øving 1 - Øving 3 er relevante og viktige. Kommentarer om noen av de individuelle oppgavene:

(1) Oppgave 6 i Øving 3 er vanskeligere, og det er ikke så viktig at du kan løse den perfekt. Det viktigste er å forstå hvordan varianten av induksjon hvor $c = 1$ benyttes.

(2) Oppgave 2 i Øving 3 er lengre enn en typisk eksamensoppgave. Likevel er det viktig at du kan følge logikken og fullføre alle stegene.

Relevante oppgaver i tidligere midtsemesterprøver

(1) Oppgave 1, 2013.

(2) Oppgave 1, 2012.

(3) Oppgave 2, 2008.

(4) Oppgave 2, 2007.

Andre kommentarer

(1) Det er svært viktig å fremstille et bevis ved induksjon på en klar måte. Du må skrive uttrykkelig at:

   (a) du benytter induksjon;

   (b) du sjekker om utsagnet er sant i ett tilfelle (eller flere tilfeller, om du benytter én av de variantene av induksjon hvor $c > 0$);

   (c) du antar at utsagnet er sant for et gitt naturlig tall m (eller flere naturlige tall, eller flere tilfeller, om du benytter én av de variantene av induksjon hvor $c > 0$), og benytter denne antakelsen for å vise at utsagnet er sant for $m + 1$.

   Med andre ord, må ordene ≪sjekke(r)≫, ≪induksjon≫, og ≪anta(r)≫ dukke opp et eller annet sted i besvarelesen din!

(2) Husk at rekursjon og induskjon går hand i hand! For å bevise noe om en sekvens som har blitt definert ved rekursjon, for eksempel sekvensen av Fibonaccitall, er det sannsynlig at induksjon behøves.

   I tillegg behøves nesten alltid, eventuelt flere ganger, regelet i definisjonen av sekvensen ved rekursjon:

$$u_{m+1} = u_m + u_{m-1}$$

for sekvensen av Fibonaccitall.

Kapittel 2

Hovedtemaene

(1) Divisjonsalgoritmen og hvordan det gir muligheten til å dele i flere tilfeller et bevis for et utsagn om heltallene.

(2) Euklids algoritme og hvordan den gir muligheten til å finne heltall u og v slik at

$$d = ul + bn,$$

hvor l og n er gitte heltall og $d = \mathsf{sfd}(l, n)$.

(3) Lineære diofantiske ligninger og hvordan begrepet ≪største felles divisor≫ og Euklids algoritme gir muligheten til å få en komplett forståelse for dem.

Det viktigste

Det som må huskes er markert.

(1) Definisjon 2.1.1 (Absoluttverdien). Må huskes.

(2) Proposisjon 2.2.6, Korollar 2.2.11, Proposisjon 2.2.15, Korollar 2.2.20 (Divisjonsalgoritme). Utsagnene (ikke bevisene) må huskes. Merkand 2.2.17 og Merknad 2.2.21 er også viktige.

(3) Hvordan divisjonsalgoritmen benyttes i bevisene for Proposisjon 2.4.2, Proposisjon 2.4.9, og Proposisjon 2.4.16. Proposisjonene er ikke spesielt viktige i seg selv.

(4) Definisjon 2.5.1 (Delbarhet) og Notasjon 2.5.2. Må huskes.

(5) De grunleggende proposisjonene i del 2.5, og hvordan bevisene benytter Definisjon 2.5.1. Utsagnene i disse proposisjonene må huskes, men du er vant til dem fra før, så dette bør ikke være et problem.

(6) Definisjon 2.6.1 (Største felles divisor) og Notasjon 2.6.2. Må huskes.

(7) Proposisjon 2.6.21 og Korollar 2.6.24 (Når $l \mid n$, er $\mathsf{sfd}(l, n) = |l|$). Utsagnene må huskes.

(8) Lemma 2.7.3 (Dersom $n = kl + r$, er $\mathsf{sfd}(n, l) = \mathsf{sfd}(l, r)$). Utsagnet (ikke beviset) må huskes.

(9) Korollar 2.7.7, Korollar 2.7.20, Merknad 2.7.8, Merknad 2.7.15 (Euklids algoritme og en algoritme for å finne heltall u og v slik at

$$d = ul + bn,$$

hvor l og n er gitte heltall og $d = \mathsf{sfd}(l, n)$). Utsagnene i (ikke bevisene for) korollarene må huskes. Det er ikke nødvendig å huske de abstrakte fremstillingene i merknadene, men du må forstå hvordan benytte algoritmene i praksis.

(10) Proposisjon 2.8.22 (Euklids lemma).

(11) Terminologi 2.9.2 (Lineære diofantiske ligninger).

(12) Proposisjon 2.9.4 (Hvordan finne en løsning til en lineær diofantisk ligning). Utsagnet må huskes, men det er ikke nødvendig å huske den formelle fremstillingen så lenge du forstå og huske hvordan den gir en metode for å finne en løsning til en lineær diofantisk ligning i praksis.

(13) Korollar 2.9.12 (Når en lineær diofantisk ligning har en løsning). Utsagnet må huskes.

(14) Korollar 2.9.19 (Alle løsningene til en lineær diofantisk ligning). Som i (12) må utsagnet huskes, men det er ikke nødvendig å huske den formelle fremstillingen så lenge du forstå og huske hvordan den gir en metode for å finne alle løsningene til en lineær diofantisk ligning i praksis.

(15) Proposisjon 2.10.9 (Den største felles divisoren til to Fibonacci tall u_m og u_n er $u_{\mathsf{sfd}(m,n)}$).

Relevante oppgaver i øvingene

De meste relevante og viktige oppgavene i øvingene er følgende.

(1) Oppgaver 1–4 i Øving 4.

(2) Oppgave 2 og Oppgave 4 i Øving 5.

(3) Oppgaver 1–2 i Øving 6.

Noen kommentarer:

(1) De andre oppgavene i Øving 4 og Øving 5 er også viktige, men ikke så direkte relevante for midtsemesterprøven.

(2) Oppgaver 3—4 i Øving 4 er litt vanskeligere og lengre enn en typisk eksamensoppgave, og derfor bør de andre oppgavene prioriteres, men de er likevel viktige og relevante.

Relevante oppgaver i tidligere midtsemesterprøver

(1) Oppgave 2, 2013.

(2) Oppgave 2, 2012.

(3) Oppgave 1, 2011.

(4) Oppgave 3, 2010.

(5) Oppgave 1, 2009.

(6) Oppgave 2, 2009.

(7) Oppgave 1, 2007.

(8) Oppgave 1, 2006.

(9) Oppgave 2, 2006. (Vanskeligere).

Andre kommentarer

(1) Når du gjennomfører et bevis for utsagn som ligner på utsagnene i Oppgave 1 – 2 i Øving 4, og i proposisjonene i del 2.4 av forelesningsnotatene, er det svært viktig at du gjør følgende.

 (a) Del beviset i tilfeller ved å benytte divisjonsalgoritmen, og skriver ned på en klar måte alle disse tilfellene. I beviset for Proposisjon 2.4.16 er for eksempel tilfellene: $n = 3k$, $n = 3k + 1$, og $n = 3k + 2$. Skriv at du benytter divisjonsalgoritmen!

 (b) Gjennomfør beviset i *alle* disse tilfellene *hvert for seg*. Skriv noen ord for å vise at du er ferdig med beviset i et tilfelle, og for å vise at du begynner med beviset for det neste.

(2) Når enten l eller n er negativ, eller både er negative, vær forsiktig når du finner heltall u og v slik at

$$d = ul + nv,$$

hvor l og n er gitte heltall og $d = \mathsf{sfd}(l, n)$. Du må først benytte algoritmen i Merknad 2.7.15 for å finne u' og v' for $|l|$ og $|n|$, og så gjør følgende:

 (a) hvis l er negativ og n er positiv, la $u = -u'$ og $v = v'$;

 (b) hvis l er positiv og n er negativ, la $u = u'$ og $v = -v'$;

 (c) hvis både l og n er negative, la $u = -u'$ og $v = -v'$.

Se beviset for Korollar 2.7.20 og eksemplene som følger det.

(3) Kommentar (2) er avgjørende når vi ønsker å finne en løsning til en lineær diofantisk ligningen. Vi får ikke en løsning om vi ikke får den riktige u og v. Når begge koeffisientene a og b i en lineær diofantisk ligning ikke er positive, må du gjennomføre akkurat metoden ovenfor for å finne u og v slik at

$$\mathsf{sfd}(a, b) = au + bv.$$

Det vil si at du må benytte algoritmen i Merknad 2.7.15 for $|a|$ og $|b|$, ikke a og b. Da får du heltall u' og v', og heltallene u og v må defineres som ovenfor. Se Eksempel 2.9.8: sjekk om du får $u = -6$ og $v = -1$.

Delene 3.1 – 3.3 av Kapittel 3

Hovedtemaet

Algebraiske manipulasjoner med kongruenser.

Det viktigste

Det som må huskes er markert.

(1) Definisjon 3.1.2 og Notasjon 3.1.6. Må huskes.

(2) Proposisjon 3.1.2. Må huskes.

(3) De andre proposisjonene i del 3.2 av kapittelet. Utsagnene i disse proposisjonene må huskes.

(4) Hvordan proposisjonene i del 3.2 av kapittelet benyttes i praksis i bevisene for proposisjonene i del 3.3 av kapittelet. Proposisjonene er ikke spesielt viktige i seg selv.

Relevante oppgaver i øvingene

Oppgaver 3–6 i Øving 6 er relevante og viktige.

Relevante oppgaver i tidligere midtsemesterprøver

(1) Oppgave 4, 2012.

(2) Oppgave 1, 2010.

(3) Oppgave 3, 2006. (*Tips*: Benytt aritmetikk modulo 10).

Andre kommentarer

(1) Nå du blir bedt om å vise at for eksempel

$$3 \equiv 5 \pmod 2,$$

bør besvarelesen din inkluderer følgende observasjoner:

(a) $3 - 5 = -2$;

(b) $2 \mid -2$.

Det er ikke nødvendig å forklare hvorfor $2 \mid -2$, men du kan gjerne gjøre det, ved å observere at $-2 = (-1) \cdot 2$.