Øving 3 – Uke 36

Oppgave 1. La n være et naturlig tall. La u_{n+1} være det $(n+1)$-te Fibonaccitallet. Bevis at

$$u_1 + u_3 + \ldots + u_{2n-1} = u_{2n}.$$

Oppgave 2. La n være et naturlig tall. La u_k være det k-te Fibonnacitallet, hvor k er et hvilket som helst naturlig tall. Bevis at

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} u_i = u_{2n}.$$

Tips: Gjør følgende:

(1) La r være

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

og la s være

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Bevis at

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(r^n - s^n\right) = \frac{r^n - s^n}{r - s}.$$

Fra Proposisjon 1.12.9, deduser at

$$u_n = \frac{r^n - s^n}{r - s}.$$

(2) Bevis at

$$(1+r)^n - (1+s)^n = \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} r^i\right) - \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} s^i\right).$$

Tips: Benytt formelen i Proposisjon 1.9.30 to ganger:

(i) Ved å la x være 1 og å la y være r.

(ii) Ved å la x være 1 og å la y være s.

(3) Deduser fra (1), (2) og Proposisjon 1.12.9 at

$$\frac{(1+r)^n - (1+s)^n}{r - s} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} u_i.$$

(4) Fra Lemma 1.12.7 vet vi at $r^2 = r + 1$ og at $s^2 = s + 1$. Deduser at

$$r^{2n} - s^{2n} = (1 + r)^n - (1 + s)^n.$$

(5) Deduser fra (1) og (4) at

$$u_{2n} = \frac{(1 + r)^n - (1 + s)^n}{r - s}.$$

(6) Konkluder fra (3) og (5) at

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} u_i = u_{2n}.$$

Oppgave 3. Følgende definerer ved rekursjon *sekvensen av Lucastall.*

(1) Det første heltallet i sekvensen er 1.

(2) Det andre heltallet i sekvensen er 3.

(3) La m være et naturlig tall slik at $m \geq 2$. Anta at det i-te heltallet i sekvensen har blitt definert for alle de naturlige tallene i slik at $2 \leq i \leq m$. Betegn det m-te heltallet i sekvensen som v_m, og betegn det $(m - 1)$-te heltallet i sekvensen som v_{m-1}. Da definerer vi det $(m + 1)$-te heltallet i sekvensen til å være $v_{m-1} + v_m$.

Skriv de første ti heltallene i sekvensen.

Oppgave 4. La v_n betegne det n-te heltallet i sekvensen av Lucastall. Bevis at

$$v_1 + \ldots + v_n = v_{n+2} - 3.$$

Oppgave 5. La u_r betegne det r-te heltallet i sekvensen av Fibonaccitall. La v_r betegne det r-te heltallet i sekvensen av Lucastall.

(1) La n være et naturlig tall slik at $n \geq 3$. Bevis at

$$v_{n+2} + v_n = (v_{n+1} + v_{n-1}) + (v_n + v_{n-2}).$$

Tips: Induksjon behøves ikke!

(2) La n være et naturlig tall slik at $n \geq 2$. Bevis at

$$v_{n+1} + v_{n-1} = 5u_n.$$

Oppgave 6. La n være et naturlig tall slik at $n \geq 2$. La u_n være det n-te Fibonaccitallet. Bevis at u_n er lik

$$\binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \cdots + \binom{\frac{n-1}{2}}{\frac{n-1}{2}}$$

dersom n er et oddetall, og er lik

$$\binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \cdots + \binom{\frac{n}{2}}{\frac{n-2}{2}}$$

dersom n er et partall. *Tips*: Benytt en variant av induksjon, og benytt Proposisjon 1.9.18.