Øving 10 – Uke 44-45

Oppgave 1. Finn alle heltallene x slik at

$$x \equiv 3 \pmod{19}$$

og

$$x \equiv 14 \pmod{48}.$$

Oppgave 2. Finn alle heltallene a slik at vi får resten 5 når vi deler a med 6, resten 2 når vi deler a med 11, resten 2 når vi deler a med 91, og resten 5 når vi deler a med 323.

Merknad. Benytt kvadratisk gjensidighet i løpet av svarene dine på Oppgave 3 og Oppgave 4.

Oppgave 3. Heltallet 17827 er et primtall. Er 16678 en kvadratisk rest modulo 17827? *Tips*: En primtallsfaktorisering til 8339 er $31 \cdot 269$.

Oppgave 4. Hvor mange løsninger (slik at ingen par av disse er kongruent til hverandre) har kongruensen

$$81x^2 - 44x - 2 \equiv 0 \pmod{3461}?$$

Oppgave 5. Hvilke av følgende Mersenne-tall er primtall? Begrunn svaret.

(1) $2^{18} - 1$.

(2) $2^{19} - 1$.

(3) $2^{23} - 1$.

Oppgave 6 (Valgfritt, men anbefalt)**.** Løs Oppgave 2-4 i Øving 9 ved å benytte kvadratisk gjensidighet.

Oppgave 7 (Valgfritt, men anbefalt)**.** Gjør følgende.

(1) La p være et primtall slik at $p > 2$. Bevis at $\mathbb{L}_p^{-2} = 1$ dersom enten

$$p \equiv 1 \pmod{8}$$

eller

$$p \equiv 3 \pmod{8},$$

og at $\mathbb{L}_p^{-2} = -1$ ellers.

(2) La n være et naturlig tall. Bevis at det finnes et primtall p slik at $p > n$ og

$$p \equiv 3 \pmod 8.$$

Med andre ord, bevis at det finnes uendelig mange primtall som er kongruent til 3 modulo 8. *Tips*: La q være produktet av alle de primtallene mindre enn eller like n som er kongruent til 3 modulo 8, og benytt en primtallsfaktorisering til $q^2 + 2$. Benytt også (1).