

Løsning til Oppgave 2 i Midtsemesterprøve 2013

For å finne $\text{sfd}(326, 78)$, benytter vi Euklids algoritme som følger.

(1) Vi har:

$$326 = 4 \cdot 78 + 14.$$

Fra 2.7.3 følger det at $\text{sfd}(326, 78) = \text{sfd}(78, 14)$.

(2) Vi har:

$$78 = 5 \cdot 14 + 8.$$

Fra 2.7.3 følger det at $\text{sfd}(78, 14) = \text{sfd}(14, 8)$.

(3) Vi har:

$$14 = 1 \cdot 8 + 6.$$

Fra 2.7.3 følger det at $\text{sfd}(14, 8) = \text{sfd}(8, 6)$.

(4) Vi har:

$$8 = 1 \cdot 6 + 2.$$

Fra 2.7.3 følger det at $\text{sfd}(8, 6) = \text{sfd}(6, 2)$.

(5) Vi har:

$$6 = 3 \cdot 2.$$

Fra Proposisjon 2.6.21 følger det at $\text{sfd}(6, 2) = 2$.

Dermed er

$$\text{sfd}(326, 78) = \text{sfd}(78, 14) = \text{sfd}(14, 8) = \text{sfd}(8, 6) = \text{sfd}(6, 2) = 2.$$

La oss nå benytte algoritmen i Merknad 2.7.15 for å finne heltall u og v slik at

$$2 = 78u + 326v.$$

(1) Siden

$$326 = 4 \cdot 78 + 14,$$

er

$$14 = (-4) \cdot 78 + 326.$$

(2) Siden

$$78 = 5 \cdot 14 + 8,$$

er

$$\begin{aligned} 8 &= 78 + (-5) \cdot 14 \\ &= 78 + (-5) \cdot ((-4) \cdot 78 + 326) \\ &= 21 \cdot 78 + (-5) \cdot 326. \end{aligned}$$

(3) Siden

$$14 = 1 \cdot 8 + 6,$$

er

$$\begin{aligned} 6 &= 14 + (-1) \cdot 8 \\ &= ((-4) \cdot 78 + 326) + (-1) \cdot (21 \cdot 78 + (-5) \cdot 326) \\ &= (-25) \cdot 78 + 6 \cdot 326 \end{aligned}$$

(4) Siden

$$8 = 1 \cdot 6 + 2,$$

er

$$\begin{aligned} 2 &= 8 + (-1) \cdot 6 \\ &= (21 \cdot 78 + (-5) \cdot 326) + (-1) \cdot ((-25) \cdot 78 + 6 \cdot 326) \\ &= 46 \cdot 78 + (-11) \cdot 326. \end{aligned}$$

Dermed kan vi la u være 46 og la v være -11 .