

# Repetisjonsoppgaver II

## Induksjon

Benytt induksjon for å løse følgende fire oppgaver.

**Oppgave 1.** La  $n$  være et naturlig tall. Bevis at

$$2^{4n} \equiv 1 \pmod{15}.$$

**Oppgave 2.** Sekvensen av Fibonaccitall  $u_1, u_2, u_3, \dots$  er definert ved rekursjon som følger:

(1)  $u_1 = 1$ ;

(2)  $u_2 = 1$ ;

(3) Anta at  $u_1, u_2, \dots, u_m$  har blitt definert, hvor  $m \geq 2$ . Da definerer vi:

$$u_{m+1} = u_m + u_{m-1}.$$

Sekvensen av Lucastall  $v_1, v_2, v_3, \dots$  er definert ved rekursjon som følger:

(1)  $v_1 = 1$ ;

(2)  $v_2 = 3$ ;

(3) Anta at  $v_1, v_2, \dots, v_m$  har blitt definert, hvor  $m \geq 2$ . Da definerer vi:

$$v_{m+1} = v_m + v_{m-1}.$$

La  $n$  være et naturlig tall slik at  $n \geq 2$ . Bevis at

$$v_n = u_{n+1} + u_{n-1}.$$

**Oppgave 3.** La  $n$  være et naturlig tall. Bevis at

$$u_2 + 2u_4 + 3u_6 + \dots + nu_{2n} = nu_{2n+1} - u_{2n}.$$

**Oppgave 4.** La  $n$  være et naturlig tall. Bevis at

$$2^{n-1}u_n \equiv n \pmod{5}.$$